2024 後期

均衡分析と数理最適化

線形計画法

経済研究所　大澤 実

osawa.minoru.4z@kyoto-u.ac.jp

本講の目的

- 最適化理論の最も基本的な問題である**線形最適化問題**，すなわち目的関数・制約条件のすべてが**線形関数**で与えられる最適化問題を学ぶ．
- 到達目標
  - 線形最適化問題の具体例を知る．
  - 線形最適化問題の標準形を知る．
  - 線形最適化問題の図的な直観を得る．
  - 主問題と双対問題の関係を知る．

$\boxed{\text{復習}}$ 栄養問題 (diet problem)

野菜 $j = 1, 2, \ldots, n$，栄養素 $i = 1, 2, \ldots, m$ がある．

必要な最低限度の栄養素の量 $b = (b_i)_{i=1}^m$ を満足しつつ，
原料費の合計を最小にする野菜購入量 $x = (x_j)_{j=1}^n$ を決めたい．

野菜 j について，単位数量あたりの価格は c_j，栄養素 i の含有量は a_{ij}．

最適化問題：

minimize: $\langle c, x \rangle$

subject to: $Ax \geq b, \ x \geq \mathbf{0}$

復習 輸送計画問題 (transportation problem)

m 箇所の工場から n 箇所の顧客へ納入したい．ただし，

- 工場 i の生産量の上限は a_i
- 顧客 j の需要量は b_j
- 工場 i から顧客 j への単位あたり輸送費用は c_{ij}

このとき総輸送費用を最小化する輸送量 $x = (x_{ij})$ を決めたい．
ただし x_{ij} は工場 i から顧客 j への輸送量を意味する．

最適化問題の例：c, x はベクトル化されているとして

minimize: $\langle c, x \rangle$

subject to: $(\mathbf{1}_m^\top \otimes I_n)x \le a, (\mathbf{1}_n \otimes I_m)x = b,\ x \ge \mathbf{0}$

線形最適化問題の標準形 (1)

定式化は様々．しかし，全ての線形最適化問題は標準形で記述可能．

等式標準形 (equality standard form)：

$$
\begin{aligned}
&\text{maximize: } \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{subject to: } \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \qquad (i = 1, \ldots, m) \\
&\qquad\qquad\quad x_j \geq 0, \qquad\qquad\qquad (j = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

不等式制約 $x \leq b$ は $x + s = b$，$x \geq 0, s \geq 0$ と等価ゆえ，追加的な補助変数 s を問題に導入することで等式制約に置き換えられる．よって理論分析においては標準形を考えればよい．

線形最適化問題の標準形 (2)

不等式標準形 (inequality standard form)

$$
\begin{aligned}
\text{maximize: } & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{subject to: } & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j, \qquad (i = 1, \dots, m) \\
& x_j \ge 0, \qquad (j = 1, \dots, n)
\end{aligned}
$$

ベクトル行列表示すれば次の通り（等式標準形は等式に置き換えるだけ）

$$
\begin{aligned}
\text{maximize: } & \langle c, x \rangle \\
\text{subject to: } & Ax \le b, \ x \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

2変数の線形最適化問題

例題：

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{subject to:} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- 実行可能領域は平面上の**凸多角形** (convex polytope)
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の**頂点の一つ**は最適解

2変数の線形最適化問題

例題：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize:} \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{subject to:} \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\
& x_1 + 2x_2 \le 8 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

- 実行可能領域は平面上の**凸多角形** (convex polyhedron)
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の**頂点の一つ**は最適解
- 最適解が複数（無限に）存在することもある

線形最適化問題の性質

- 線形最適化問題は凸計画問題
  - 凸計画問題に対する結果は全て成立する．
    特に，最適解は存在すれば必ず凸集合をなす
  - 目的関数が線形であるというより強い条件が追加されているため，
    双対性 (duality) に関する結果は，一般の凸計画問題より強い性質が成り立つ $\rightarrow$ **強双対性** (strong duality)
- 実行可能領域は n 次元空間内の**凸多面体** (convex polyhedron)
- 凸多面体の頂点の中に必ず最適解が存在．頂点を全て探索するのは計算コストが爆発．効率的な頂点探索手法 $\rightarrow$ **単体法** (simplex method)

例 最適応答対応

離散的なアクション $a \in \mathcal{A} \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$ があり，各 a に対する利得が π_a で与えられるもとでの**混合最適応答対応** $\mathrm{BR}(\pi)$ は線形最適化問題である．

$\mathrm{BR}(\pi)$ は，$\Delta \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, 1\rangle = 1, y_a \geq 0\}$ として，

$$\mathrm{BR}(\pi) = \arg\max_{y \in \Delta} \langle \pi, y\rangle$$

であった．$\max_{y \in \Delta} \langle \pi, y\rangle$ は線形最適化問題であることがわかる．

Quiz $n = 2$ の場合を考え，π_1 と π_2 の大小関係に注目して解の特性について考察せよ．

双対問題：上界からの導入

凸計画問題に対して，等価，あるいは少なくとも元の問題の重要な情報をもたらす**双対問題** (dual problem) を定義することができる．

実用上，問題の最適値 $f(\bar{x})$ について，**上界** (upper bound) および**下界** (lower bound) を知りたいケースがあるだろう．このような観点からの線形最適化問題に対して双対問題を定義することを試みよう．

- 費用最小化問題を考えるなら，最悪ケースでどれだけ費用がかかるかの上界の情報を得たい．
- 厚生最大化問題を考えるならば，最悪ケースでどれだけの社会厚生が達成されるかの下界の情報を得たい．

双対問題：上界からの導入

目的関数の最良の（=**最小の**）**上界**を求めたい．

次の不等式標準形の例を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{maximize: } & 20x_1 + 10x_2 \\
\text{subject to: } & x_1 + x_2 \le 6, \\
& 3x_1 + x_2 \le 12, \\
& x_1 + 2x_2 \le 10, \ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

知りたいのは $20x_1 + 10x_2 \le z$ を満足する上界 z．

Quiz こういう不等式をこの問題のどこからかひねり出せないだろうか？

双対問題：上界からの導入

使える条件は

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 6, \\
3x_1 + x_2 &\le 12, \\
x_1 + 2x_2 &\le 10.
\end{aligned}
$$

それぞれ，$p_1, p_2, p_3 \ge 0$ という非負実数を掛けて足し合わせてみよう
(負数を掛けると不等式の向きが変わって上界評価に使えなくなる)．

双対問題：上界からの導入

$$\left\{\begin{array}{l} p_1(x_1+x_2) \le 6p_1, \\ p_2(3x_1+x_2) \le 12p_2, \\ p_3(x_1+2x_2) \le 10p_3 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow$$

$$(p_1+3p_2+p_3)x_1+(p_1+p_2+2p_3)x_2 \le 6p_1+12p_2+10p_3$$

目的関数 $20x_1+10x_2$ において，変数 x_1, x_2 が非負なので

$$p_1+3p_2+p_3 \ge 20$$

$$p_1+p_2+2p_3 \ge 10$$

が成り立てば $20x_1+10x_2 \le$ と上から抑えられる．

双対問題：上界からの導入

そのような条件を満足しつつ，上界 $z = 6p_1 + 12p_2 + 10p_3$ を最小化すれば最良の上界を求められる：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize:}\ & 6p_1 + 12p_2 + 10p_3 \\
\text{subject to:}\ & p_1 + 3p_2 + p_3 \geq 20, \\
& p_1 + p_2 + 2p_3 \geq 10, \\
& p_1, p_2, p_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- この問題を**双対問題** (dual)，もとの問題を**主問題** (primal) と呼ぶ．
- 双対問題の変数，**双対変数** (dual variable) の数は主問題の制約条件の数．その逆も成り立つ．
- 線形最適化問題について，双対問題の双対問題は主問題に戻る．

感度解析と双対変数

- もとの問題が政府による厚生最大化問題だと思ってみよう．制約条件は資源に関するなんらかの制約（$i = 1, 2, 3$）である．
- このとき，制約 1（≤ 6）を微小量 δ 単位増やしたとき，上界は $(6+\delta)p_1 + 12p_2 + 10p_3$ となり，δp_1 だけ増える．
- p_1 は制約 1 を緩和することによる限界的な厚生増分を評価している．費用最小化問題ならば**潜在価格** (shadow price) などとも呼ばれる．
- このように，制約の修正によって目的関数値がどれほど変化するかを評価する分析を**感度解析** (sensitivity analysis) と呼ぶ．

双対問題

不等式標準形の線形最適化問題：

maximize: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

subject to: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = 1, \ldots, m)$

$x_j \geq 0, \quad (j = 1, \ldots, n)$

各不等式成約に対して双対変数 $p = (p_i)_{i=1}^{m}$ を導入すると双対問題は

minimize: $\sum_{i=1}^{m} b_i p_i$

subject to: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq c_j, \quad (i = 1, \ldots, n)$

$p_i \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, m)$

双対問題

コンパクトにベクトル・行列を使って書くと標準形は

主問題

$$\begin{aligned} \text{maximize:} \ & \langle c, x \rangle \\ \text{subject to:} \ & Ax \leq b, \\ & x \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{minimize:} \ & \langle b, p \rangle \\ \text{subject to:} \ & A^\top p \geq c, \\ & p \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Quiz 双対問題の形は主問題の形によって少し異なる．主問題の制約条件が等号制約（$Ax = b$）の場合の双対問題を求めてみよ．

双対問題

主問題の制約条件が等号のときは次のようになる．

主問題

$$\begin{aligned} \text{maximize: } & \langle c, x \rangle \\ \text{subject to: } & Ax = b, \\ & x \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & \langle b, p \rangle \\ \text{subject to: } & A^\top p \geq c \end{aligned}$$

等式制約なので，上界評価のために p が非負である必要がなくなる．

双対定理

弱双対性定理：双対問題で与えられる目的関数の上界は主問題で与えられる目的関数の下界よりも大きい．具体的には $\langle c, x\rangle \leq \langle b, p\rangle$．これは双対問題の構成方法から自明．

強双対性定理：線形最適化問題においては，主問題の解と双対問題の解で目的関数値が一致することが知られている．それぞれの問題に解が存在するならば，それぞれ $\bar{x}$，$\bar{p}$ とすれば，$\langle c, \bar{x}\rangle = \langle b, \bar{p}\rangle$．

解が存在するならどちらの問題を解いてもよい．実用上は問題の次元の小さい方を解くことになる．

線形最適化問題の最適性条件

最適解 $(\bar{x}, \bar{p})$ が満足すべき条件：

- 強双対性より $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{p} \rangle$
- 制約条件：$A\bar{x} = b$，$A^\top \bar{p} \geq c$，$\bar{x} \geq \mathbf{0}$
  （簡単のため，主問題が等号制約の場合を考える）

整理すると

$$\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{p} \rangle = (A\bar{x})^\top \bar{p} = (A^\top \bar{p})^\top \bar{x}$$

$$\rightarrow (A^\top \bar{p} - c)^\top \bar{x} = \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} \bar{p}_i - c_j \Big) \bar{x}_j = 0$$

$A^\top \bar{p} \geq c$，$\bar{x} \geq \mathbf{0}$ なので j ごとの条件として書ける．

線形最適化問題の最適性条件

最適解 $(\bar{x}, \bar{p})$ が満足すべき条件：

- 強双対性より $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{p} \rangle$
- 制約条件：$A\bar{x} = b,\ A^\top \bar{p} \geq c,\ \bar{x} \geq \mathbf{0}$
  （簡単のため，主問題が等号制約の場合を考える）

全ての j について次の関係が成立することが $\bar{x}, \bar{p}$ が最適解である条件：

$$\left(\sum_i a_{ij}\bar{p}_i - c_j\right)\bar{x}_j = 0 \quad \forall j$$

相補性条件 (complementarity condition)：

$\sum_i a_{ij}\bar{p}_i - c_j = 0$ または $\bar{x}_j = 0$ の少なくとも一方が成立する．

練習問題

主問題の制約が等号ではない次の一般ケースを考える．

最適解 $(\bar{x}, \bar{p})$ が満足すべき条件：

- 強双対性より $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{p} \rangle$
- 制約条件：$A\bar{x} \leq b$， $A^{\top}\bar{p} \geq c$， $\bar{x} \geq \mathbf{0}$, $\bar{p} \geq \mathbf{0}$

このとき，次の相補性条件が必要十分であることを示せ．

$$\Big(\sum\nolimits_i a_{ij}\bar{p}_i - c_j\Big)\bar{x}_j = 0 \quad \forall j$$

$$\Big(b_i - \sum\nolimits_i a_{ij}\bar{x}_j\Big)\bar{p}_i = 0 \quad \forall i$$

- 必要な**凸解析** (convex analysis) の用語を学ぶ.
- 一般の非線形最適化問題の理論を学ぶ.
- 一般の凸計画問題およびその双対理論を学ぶ.