

2024 後期

# 均衡分析と数理最適化

凸解析と一般の最適化問題における最適性・双対性

経済研究所 大澤 実

osawa.minoru.4z@kyoto-u.ac.jp

# 目的

- **非線形計画問題** (nonlinear optimization problem) およびその最適性条件を学ぶ。特に**凸最適化問題** (convex optimization problem) について学ぶ。
- 到達目標
  - 必要な**凸解析** (convex analysis) の知識を速習する。
  - 非線形最適化問題の一般的な最適性条件とその意味を理解する。
  - 非線形最適化問題の最も基本的な最適性条件である**Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件**を理解する。
  - 良い問題クラスである凸最適化問題を知る。

# 凸解析 (Convex Analysis)

# 一般の制約あり最適化問題

一般の制約あり非線形計画問題を考える：

minimize:  $f(x)$

subject to:  $x \in S$

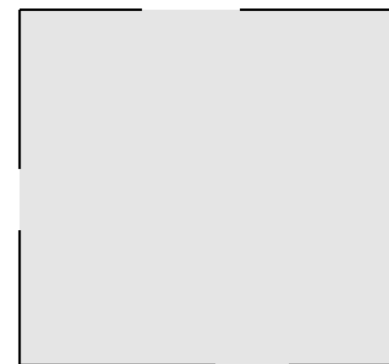
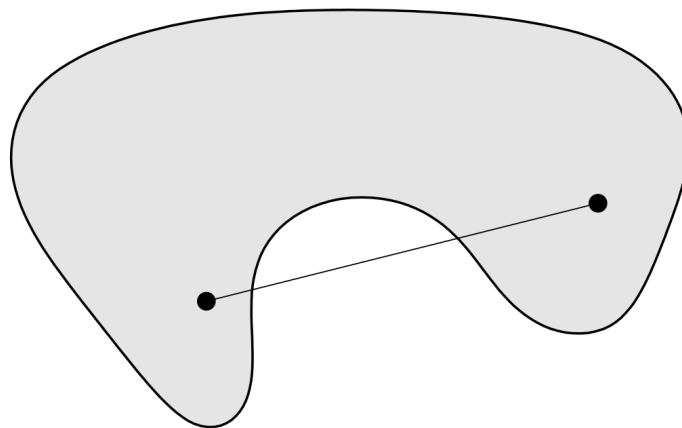
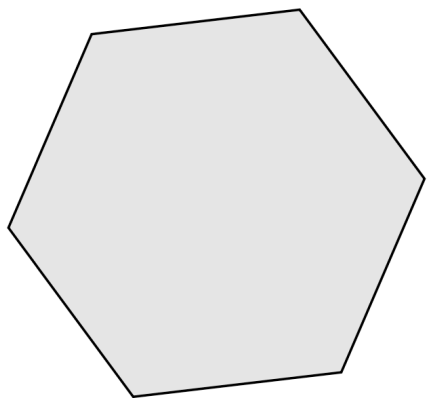
この問題の最適性条件を可能な限り一般的に表現したい。

凸解析のことはを用いるとすっきり書くことができることを見ていこう。

## 復習 凸集合 (convex set)

定義 凸集合  $S$  は次の条件を満足する集合 :

$$\theta x + (1 - \theta)y \in S, \quad \forall x, y \in S, \theta \in [0, 1].$$



(図 : Boyd & Vandenberghe)

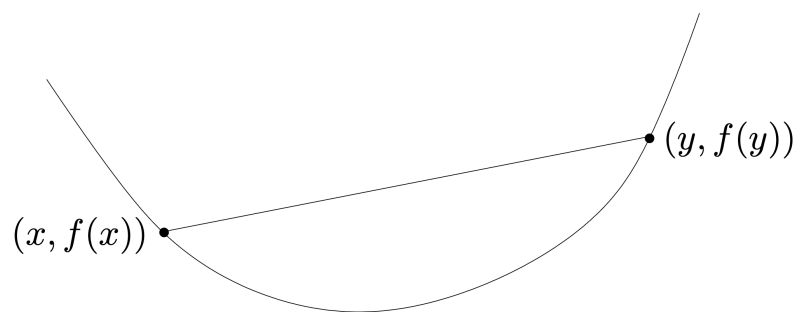
## 復習 凸関数 (convex function)

**定義**  $S \subset \mathbb{R}^n$  上の凸関数  $f$  とは次の条件を満足する関数：

$$\theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \geq f(\theta x + (1 - \theta)y), \forall x, y \in S, \forall \theta \in [0, 1].$$

不等号が狭義で成立するならば**狭義凸関数**と呼ぶ。

$\Leftrightarrow$  関数の **epigraph** =  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S, t \geq f(x)\}$  が凸集合



(図 : Boyd & Vandenberghe)

## 復習 微分可能な関数の凸性の特徴づけ

**勾配による特徴づけ (1)** :  $S$  を含む開集上で1階微分可能なスカラー値関数  $f$  が  $S$  上の凸関数であるための必要十分条件 :

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x) \quad \forall x, y \in S$$

**Hesse 行列による特徴づけ** :  $S$  を含む開集合上で2階微分可能なスカラー値関数  $f$  が  $S$  上の凸関数であるための必要十分条件 :

$$z^\top \nabla^2 f(x) z \geq 0 \quad \forall z \neq \mathbf{0} \quad \forall x \in S$$

- 狭義凸性の必要条件は等号を外す.

# 微分可能な関数の凸性の特徴づけ

**勾配による特徴づけ (2)** :  $S$  を含む開集上で1階微分可能なスカラー値関数  $f$  が  $S$  上の凸関数であるための必要十分条件は、勾配写像  $\nabla f$  が  $S$  上**単調** (monotone) であること :

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in S.$$

**定義**  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  が  $X$  上単調であるとは、全ての  $x, y \in X$  に対して  $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0$  が成立すること。

**Quiz**  $f$  が2階微分可能なとき、 $\nabla f$  の単調性が  $f$  の Hesse 行列の半正定値性と等価であることを確認せよ。(狭義凸性の必要条件は等号を外す.)



# 錘 (cone), 極錘 (polar cone), 双対錘 (dual cone)

**定義**  $x \in C \Rightarrow \alpha x \in C$  ( $\alpha \geq 0$ ) なる集合  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  を**錘**と呼ぶ.

- 明らかに, 任意の錘  $C$  に対して  $0 \in C$ .
- 錘は閉集合とは限らず, 凸集合とも限らない.
- 閉かつ凸な場合特に**閉凸錐** (closed convex cone) と呼ぶ.

**定義**  $C^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 0, \forall x \in C\}$  を錘  $C$  の**極錘**と呼ぶ.

**定義**  $C^* \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \in C\}$  を**双対錘**と呼ぶ.

- $C^\circ$  は閉凸錘である.
- 錘  $C$  の極錘  $C^\circ$  は  $C$  と「直交する」要素の集合.  $C^* = C$  を満足する錘  $C$  を**自己双対錘**と呼ぶ.
- 凸錘  $C$  に対して  $C^{\circ\circ} = \text{cl } C$ .

# 接錘 (tangent cone) と法線錘 (normal cone)

集合  $S \subset \mathbb{R}^n$  に属する点  $\bar{x}$  を考えよう.

**定義**  $\bar{x}$  へと収束する  $S$  上の点列  $\{x^k\}$  を考える. 対応するベクトルの列  $\{\alpha_k(x^k - \bar{x})\}$  ( $\alpha_k > 0$ ) が  $y$  へ収束するとき,  $y$  を  $S$  の  $\bar{x}$  における**接ベクトル** (tangent vector) と呼ぶ.

**定義**  $\bar{x} \in S$  における全ての接ベクトルの集合  $T_S(\bar{x})$  を**接錘**と呼ぶ.

**Quiz** 適当な凸・非凸集合を考え, 各点で接錘を図示してみよ.

**定義** 集合  $S$  の接錘  $T_S(\bar{x})$  の極錘  $N_S(\bar{x}) \equiv T_S(\bar{x})^\circ$  を**法線錘**と呼ぶ.

- 接錘および法線錘は  $S$  の各点において定義される.

# 凸集合の法線錘

$S$  が凸集合の場合

$$N_S(\bar{x}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, x - \bar{x} \rangle \leq 0, x \in S \right\}.$$

**Quiz**  $a_j \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) として, 次の多面体  $S$  を考える:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_j, x \rangle \leq b_j \quad \forall j \right\}.$$

$I(x) \equiv \{j \mid \langle a_j, x \rangle = b_j\}$  とするとき,  $T_S(x), N_S(x)$  を書き下せ.

**復習** 関数  $g$  の勾配  $\nabla g$  は  $g$  の等高線と各点で直交する.

**Quiz** 特に,  $\bar{x}$  が  $S$  の内点である場合に  $N_S(x)$  がどうなるか考えよ.

# **復習** 制約なし最適化問題

# 無制約最適化問題の最適性条件

**定理** **1次の必要条件** (1st-order necessary condition) :  $f$  が1階微分可能とする.  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  が局所的最適解ならば次の条件を満足.

$$\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}.$$

このような  $\bar{x}$  を**停留点** (stationary point) と呼ぶ.

- 必要条件 :  $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0} \iff \bar{x}$  が局所的最適解.

# 無制約最適化問題の最適性条件

**定理** **2次の必要条件** (2nd-order necessary condition).  $f$  が2階微分可能とする.  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  が局所的最適解ならば  $\nabla^2 f(\bar{x})$  は半正定値.

- 行列  $A$  が半正定値:  $\delta^\top A \delta \geq 0$  ( $\forall \delta \neq 0$ )
- 必要条件:  $\nabla^2 f(\bar{x})$  が半正定値  $\longleftarrow \bar{x}$  が局所的最適解.

# 無制約最適化問題の最適性条件

**定理** **2次の十分条件** (2nd-order sufficient condition).  $f$  が2階微分可能とする.  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  において  $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$  かつ  $\nabla^2 f(\bar{x})$  が**正定値**ならば局所的最適解.

- 行列  $A$  が正定値:  $\delta^\top A \delta > 0$  ( $\forall \delta \neq 0$ )
- 十分条件:  $\implies \bar{x}$  が局所的最適解.

# 一般の制約あり最適化問題



# 最適性条件：一次の必要条件

一般の制約あり非線形計画問題を考える：

$$\text{minimize: } f(x) \quad \text{subject to } x \in S$$

**定理** **一次の必要条件**：関数  $f$  は点  $\bar{x}$  において微分可能とする。このとき、 $\bar{x}$  が局所的最適解ならば次が成立する： $-\nabla f(\bar{x}) \in N_S(\bar{x})$ 。

- 上の条件を満足する点を**停留点**と呼ぶ（無制約の場合の一般化）。
- 必要条件： $-\nabla f(\bar{x}) \in N_S(\bar{x}) \iff$  局所的最適解

**Quiz** 2変数関数の最適化問題を考えよう。実行可能領域  $S$  は有界な多角形領域とする。局所的最適解  $\bar{x}$  が  $S$  の端点である場合、内点である場合のそれぞれについてこの条件が何を意味しているか確認せよ。

# 十分性は成立しない

$n = 2$  とし,  $f(x) = -x_2$ ,  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2\}$  としよう.

$x = (0, 0)$  において

$$T_S(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 = 0\},$$

$$N_S(x) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 = 0\},$$

$$\nabla f(x) = (0, -1).$$

$-\nabla f(x) \in N_S(x)$  だが  $S$  上で  $f$  を減少させられる (最適解ではない)

# 最適性条件：凸計画問題の場合

**定義** 実行可能領域  $S$  が非空な凸集合，目的関数  $f$  が凸関数である最適化問題を **凸計画問題** と呼ぶ。

凸計画問題は，**局所的最適解**が存在するならば**大域的最適解**と一致するという非常によい性質を持っている。

- **局所的最適解**：  $f(\bar{x}) \leq f(y) \quad \forall y \in x$  の近傍
- **大域的最適解**：  $f(\bar{x}) \leq f(y) \quad \forall y \in$  許容領域

**定理** 凸計画問題に対する**一次の必要十分条件**：  $S \subset \mathbb{R}^n$  が非空の凸集合， $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は  $\bar{x} \in S$  において1階微分可能な凸関数とする。このとき， $-\nabla f(\bar{x}) \in N_S(\bar{x})$  は  $\bar{x}$  が大域的最適解であるための必要条件である。

**Quiz** 凸計画問題でない場合に何が起こるか図示せよ。

# 非線形計画問題

実行可能領域  $S \subset \mathbb{R}^n$  は、具体的な制約関数たちによって表示される。

minimize:  $f(x)$

subject to:  $g(x) \leq \mathbf{0}$

$h(x) = \mathbf{0}$

- $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  :  $m$  本の不等式制約,  $l$  本の等式制約

**復習**  $f, g$  が凸関数であり,  $h$  が affine 関数であれば凸計画問題。

この場合, 一次の最適性条件はどのように表現できるだろうか?

# 制約関数の勾配と法線錘

制約関数で表現された実行可能領域  $S$  の境界は制約関数 = 0 の等高線  
⇒ 対応する制約関数の勾配はこれと直交する。

既に **Quiz** で、実行可能領域が多面体である場合について  $S$  の各点における法線錘を求めたことを思い出そう。制約関数の勾配を用いれば、各点における法線錘  $N_S(x)$  を表現できそうだと期待できる。

簡単のため不等式制約のみ考える。  $I(x) \equiv \{j \mid g_j(x) = 0\}$  として

$$N_S(x) =_{(???) } \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid z = \sum_{j \in I(x)} \lambda_j \nabla g_j(x), \lambda_j \geq 0 \right\}$$

**Quiz**  $I(x) = \emptyset$  はどういう場合か。なお  $S$  には内点が存在するとする。

# 制約関数の勾配と法線錘

簡単のため不等式制約のみ考える．  $I(x) \equiv \{j \mid g_j(x) = 0\}$  として

$$N_S(x) =_{(???) } \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid z = \sum_{j \in I(x)} \lambda_j \nabla g_j(x), \lambda_j \geq 0 \right\}$$

これが正しいならば，  $-\nabla f(\bar{x})$  が右辺の集合に含まれることが最適性条件．

が，一般には成立しない． **制約想定** (constraint qualification) が必要．

$N_S(x) = T_S(x)^\circ$  だが  $T_S(x)$  が  $\{\nabla g_j(x)\}$  で表現できない可能性．

# 線形化錘

**定義** 不等式制約のみ考える.  $x$  で  $g_i(x) = 0$  なる制約を**有効制約** (active constraint) と呼ぶ. その添字集合を  $I(x) \subset \{1, 2, \dots, m\}$  で表そう. このとき, 次の錘を  $S$  の  $x$  における**線形化錘** (linearizing cone) と呼ぶ.

$$C_S(x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_i(x), z \rangle \leq 0, \forall i \in I(x) \right\}$$

$C_S(x)$  は  $T_S(x)$  の線形近似. 両者は一般に一致しない.

**例**  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  と  $S' = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \leq 0\}$  の点  $x = 0$  における  $C_S(x)$  と  $T_S(x)$  を比較せよ.

$T_S(x) \subseteq C_S(x)$  は常に成立.  $T_S(x) \supseteq C_S(x)$  が成立するなら  $T_S(x) = C_S(x)$  で,  $-\nabla f(\bar{x}) \in N_S(\bar{x}) = T_S(\bar{x})^\circ = C_S(\bar{x})^\circ$ .

$\Rightarrow N_S(x)$  について先の線形近似表現が使える.

# Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件

KKT 条件は、条件  $-\nabla f(\bar{x}) \in C_S(\bar{x})^\circ$  によって最適性条件を記述する。

**定理** **Karush–Kuhn–Tucker 条件**：不等式制約のみを持つ問題を考える。 $\bar{x}$  は局所最適解とし、目的関数  $f$  および  $\{g_i\}_{i=1}^m$  は  $\bar{x}$  において微分可能とする。このとき、 $C_S(\bar{x}) \subseteq \text{co } T_S(\bar{x})$  なら、次を満足する係数  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  が存在する。

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0. \quad (\text{相補性条件})$$

- 前提条件  $C_S(\bar{x}) \subseteq \text{co } T_S(\bar{x})$  を **制約想定** と呼ぶ。
- 制約想定のもとで KKT 条件は最適性の必要条件である。
- 古い文献では Kuhn–Tucker 条件と記載されていることもある。



# 制約想定

条件  $C_S(\bar{x}) \subseteq \text{co } T_S(\bar{x})$  のための (必要) 十分条件.

- **一次独立制約想定** :  $\{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in I(\bar{x})}$  は一次独立.
- **Slater 制約想定** :  $g_i$  は凸関数であり,  $S$  に内点が存在する ( $g_i(x^0) < 0 \ \forall i$  を満足する  $x^0$  が存在する).
- **Cottle 制約想定** :  $\exists \mathbf{y}, \langle \nabla g_i(\bar{x}), \mathbf{y} \rangle < 0 \ \forall i \in I(\bar{x})$ .
- **Abadie 制約想定** :  $C_S(\bar{x}) \subseteq T_S(\bar{x})$ .
- **Guignard 制約想定** :  $C_S(\bar{x}) \subseteq \text{co } T_S(\bar{x})$ .

一次独立  
Slater }  $\Rightarrow$  Cottle  $\Rightarrow$  Abadie  $\Rightarrow$  Guignard

**Quiz** 一次独立制約想定, Slater 制約想定, Cottle 制約想定が成立しないケースを図示し, これらの制約想定の意味を確認せよ.

# Langrange 関数と KKT 条件

係数  $\lambda$  を **Lagrange 乗数** (Lagrange multiplier) と呼び、次の関数を **Lagrange 関数** (Langrangian function) と呼ぶ。

$$L(x, \lambda) \equiv f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

Lagrange 関数を使って KKT 条件を書くと

$$\nabla L(x^*, \lambda) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0.$$

# 凸計画問題におけるKKT条件の必要十分性

一般ケースの結果は既に証明無しで述べた。制約関数が具体的に与えられる場合、無制約の場合の結果を既知とすれば簡単に証明できる。

**Quiz**  $f, \{g_i\}$  が微分可能な凸関数である場合、すなわち凸計画問題となる場合を考える。このとき、KKT条件を満足する  $\lambda \geq 0$  を固定し、凸関数  $\ell(x) \equiv f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x)$  の制約なし最小化問題を考えることにより、以下に示すKKT条件が大域最適性の十分条件にもなることを証明せよ。

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \geq 0, g_i(\bar{x}) \leq 0, \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0.$$

**解**  $\ell(x)$  は凸関数の線形和であるから凸関数である．制約なしの凸関数の最小化であるから，大域最適性の必要十分条件は  $\nabla \ell(x) = \mathbf{0}$  である．これは KKT 条件を満足する点  $\bar{x}$  において達成される：

$$\nabla \ell(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = \mathbf{0}.$$

さて，最適性の定義より  $\ell(\bar{x}) \leq \ell(x) \quad \forall x \in S$ ．具体的には

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\bar{x}) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

KKT 条件より  $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$ ， $\lambda_i g_i(x) \leq 0$ ．よって

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \leq f(x) \quad \forall x \in S.$$

# 等式・不等式制約を持つ問題

2次の最適性条件については割愛する（参考文献を参照のこと）。

等式制約がある場合にもほぼ同様に拡張される。

**定義** 等式・不等式制約を持つ問題では線形化錘は次のように定義する。

$$C_S(x) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \langle \nabla g_i(x), z \rangle \leq 0, \forall i \in I(x) \\ \langle \nabla h_i(x), z \rangle = 0, \forall i = 1, 2, \dots, l \end{array} \right\}$$

不等式制約のみの場合と同様， $-\nabla f(\bar{x}) \in C_S(\bar{x})^\circ$  が適切な制約想定のもとで最適性の必要条件となる。

# 等式・不等式制約を持つ問題に対するKKT条件

**定理**  $\bar{x}$  は局所最適解とし，目的関数  $f$  および  $\{g_i\}_{i=1}^m, \{h_j\}_{j=1}^l$  は  $\bar{x}$  において微分可能とする．このとき， $C_S(\bar{x}) \subseteq \text{co } T_S(\bar{x})$  **であれば**，次を満足する係数  $\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^l$  が存在する．

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^l \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0,$$

$$h_j(\bar{x}) = 0.$$

- 等式制約に対する係数  $\mu$  に非負制約はない．
- 不等式制約のみの場合と同様に，凸計画問題であれば大域最適性の必要十分条件となる．

# 練習問題

**Quiz** 次の効用最大化問題の KKT 条件を書き下し，解け．

$$\text{maximize: } x^\alpha y^\beta \quad (\alpha, \beta < 1)$$

$$\text{subject to: } px + qy \leq I, x \geq 0, y \geq 0$$

非線形計画問題の標準的な書き方に書き改めると

$$\text{minimize: } -x^\alpha y^\beta$$

$$\text{subject to: } px + qy - I \leq 0, \quad (\lambda)$$

$$-x \leq 0, \quad (\mu_1)$$

$$-y \leq 0 \quad (\mu_2)$$

**解** Lagrange 関数を以下で定義しよう。

$$L(x, y, \lambda, \mu_1, \mu_2) = -x^\alpha y^\beta + \lambda(px + qy - I) - \mu_1 x - \mu_2 y$$

$I > 0$  ならば Slater 制約想定がを満足  $\Rightarrow$  KKT 条件が最適性の必要条件.

KKT 条件は

$$\nabla_{(x,y)} L = \mathbf{0} \Rightarrow - \begin{bmatrix} \alpha x^{\alpha-1} y^\beta \\ \beta x^\alpha y^{\beta-1} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\mu_1 x = 0, \mu_2 y = 0, \mu_1, \mu_2 \geq 0, x, y \geq 0,$$

$$\lambda(px + qy - I) = 0, \lambda \geq 0, px + qy - I \leq 0.$$

$x = 0, y = 0$  とすると  $\nabla_{(x,y)} L$  が発散するので  $x, y > 0$ . よって



$\mu_1, \mu_2 = 0$ .  $\lambda = 0$  とすると  $\nabla_{(x,y)} L = \mathbf{0}$  が成立しないので  $\lambda > 0$ .  
よって  $px + qy - I = 0$ . 一方  $\nabla_{(x,y)} L = \mathbf{0}$  から

$$\begin{cases} px = \frac{1}{\lambda} \alpha x^\alpha y^\beta \\ qy = \frac{1}{\lambda} \beta x^\alpha y^\beta \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{\lambda} (\alpha + \beta) x^\alpha y^\beta$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(\alpha + \beta) x^\alpha y^\beta}{I} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{I}{p} \\ y = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{I}{q} \end{cases}$$

予算制約に対応する Lagrange 乗数  $\lambda$  は**所得の限界効用**の逆数になる。

**Quiz** 効用関数が準線形  $x + f(y)$  ( $f$ : 単調増加) であるとき所得の限界効用が定数となることを確認せよ。

※ 予算制約  $x + qy \leq I$ , ただし  $I$  は十分大きい。

# Lagrange 双对性

# Lagrange 双対問題

引き続き，単純化のために不等式制約のみをもつ非線形計画問題を考える．

minimize:  $f(x)$

subject to:  $g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$

拡張実数値の Lagrange 関数  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  を次のように定義する．

$$L_0(x, \lambda) = \begin{cases} f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) & (\lambda \geq \mathbf{0}) \\ -\infty & (\lambda \not\geq \mathbf{0}) \end{cases}$$

# Lagrange 双対問題

$\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ ,  $\omega : \mathbb{R}^m \rightarrow [-\infty, +\infty)$  を以下で定義する.

$$\theta(x) = \sup\{L_0(x, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}^m\}$$

$$\omega(\lambda) = \inf\{L_0(x, \lambda) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

実行可能領域を  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \ \forall i\}$  で表すと,  $L_0$  の定義から

$$\theta(x) = f(x) + \delta_S(x), \quad \mathbf{1}_S(x) = \begin{cases} 0 & (x \in S) \\ +\infty & (x \notin S) \end{cases}$$

ただし  $\mathbf{1}_S$  は  $S$  の**指示関数** (indicator function).

# Lagrange 双対問題 (Lagrangian dual problem)

**定義**  $\theta$  の無制約最小化問題を **主問題** と呼ぶ.

$$(P) \text{ minimize: } \theta(x)$$

**定義**  $\omega$  の最大化問題を **Lagrange 双対問題** と呼ぶ.

$$(D) \text{ maximize: } \omega(\lambda)$$

$$L_0(x, \lambda) \text{ を } \begin{cases} \lambda \text{ について最大化} = \theta(x) & \rightarrow \text{主問題} \quad \min \theta(x) \\ x \text{ について最小化} = \omega(\lambda) & \rightarrow \text{双対問題} \quad \max \omega(\lambda) \end{cases}$$

**Quiz** 次の線形計画問題に対する Lagrange 関数を与え, Lagrange 双対問題を導け.

minimize:  $\langle c, x \rangle$

subject to:  $Ax \geq b$

**解** Lagrange 関数は

$$L_0(x, \lambda) = \begin{cases} \langle c, x \rangle + \langle \lambda, b - Ax \rangle & (\lambda \geq \mathbf{0}) \\ -\infty & (\lambda \not\geq \mathbf{0}) \end{cases}$$

$\lambda \not\geq \mathbf{0}$  なら  $\omega(\lambda) = -\infty$ .  $\lambda \geq \mathbf{0}$  のとき

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \inf \{ \langle c, x \rangle + \langle \lambda, b - Ax \rangle \mid x \in \mathbb{R}^n \} \\ &= \langle \lambda, b \rangle + \inf \{ \langle c - A^\top \lambda, x \rangle \mid x \in \mathbb{R}^n \} \\ &= \begin{cases} \langle \lambda, b \rangle & (c - A^\top \lambda = \mathbf{0}) \\ -\infty & (c - A^\top \lambda \neq \mathbf{0}) \end{cases} \end{aligned}$$

## 主問題

minimize:  $\langle c, x \rangle$

subject to:  $Ax \geq b.$

に対する Lagrange 双対問題は

maximize:  $\langle b, \lambda \rangle$

subject to:  $A^\top \lambda = c, \lambda \geq \mathbf{0}.$



# 非線形計画問題における双対性

線形計画問題では主問題と双対問題の最適値は存在すれば一致した (**強双対性定理**)。非線形計画問題でも、凸計画問題ならば**おおむね**この双対性は成立する (弱双対性は常に成立)。

**定理** 主問題 (P) が凸計画問題であるとする。このとき、主問題の最適値が有限で、主問題の実行可能領域が **Slater 条件を満足するならば**、双対問題 (D) に最適解が存在して以下が成立する：

$$\inf_x \theta(x) = \max_{\lambda} \omega(\lambda)$$

一般には非線形計画問題において主問題と双対問題の最適値は一致せず、**双対性ギャップ** (duality gap) が発生する。

# 演習：輸送計画問題

(1) 次の輸送計画問題の双対問題を導け．なお  $\sum_i O_i = \sum_j D_j$  とする．

$$\text{minimize: } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{subject to: } \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq O_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (r_i)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq D_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (p_j)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

ただし  $p, r$  は各制約に対応する Lagrange 乗数とする．

(2) 最適解および対応する Lagrange 乗数を  $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{r})$  とする．最適性の条件を導き，意味解釈せよ．

# 演習：零和ゲームのMin-Max 定理 (出典：寒野・土谷)

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  を利得行列,  $X = \Delta_n$ ,  $Y = \Delta_m$  とする. ただし  $\Delta_n = \{x \mid \sum_i x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$  は確率単体.

列側プレイヤー C が  $j$  を選び, 行側プレイヤー R が  $i$  を選んだとき, C は R に  $a_{ij}$  を支払うとする.  $a_{ij} > 0$  なら R の,  $a_{ij} < 0$  なら C の“勝ち”.

C の混合戦略  $y \in Y$  に対する R の期待利得は  $Ay$  である. よって混合戦略  $x \in X$  の期待利得は,  $x^\top Ay$ . C は支払いを最小化し, R は受け取りを最大化しようとする. このときそれぞれのプレイヤーが考える状況は

$$(R) \quad \max_{x \in X} \left( \min_{y \in Y} x^\top Ay \right) \qquad (C) \quad \min_{y \in Y} \left( \max_{x \in X} x^\top Ay \right).$$

強双対性によって問題 (R) と問題 (C) の値が一致することを示せ.

# 解答方針

Cが仮定するRの行動の結果，Cが $\bar{y} \in Y$ をプレイした時の支払い額 $v$ は

$$v = \max_{x \in X} \sum_i x_i v_i^R(\bar{y})$$

ただし $v_i^R(\bar{y}) \equiv \sum_j a_{ij} \bar{y}_j$ はCの戦略を固定したRの戦略 $i$ の期待利得。  
言い換えれば全ての $i$ に対して $v \geq v_i^R(\bar{y})$ 。

Cはこの支払いを $y$ を選ぶことにより最小化する。考えるべき問題は：

$$\min_{y \in Y, v \in \mathbb{R}} v \quad \text{s.t.} \quad v \geq v_i^R(y) \quad \forall i$$

同様にRが考える問題（受取額の最大化）を構築し，これらの問題が互いに  
双対問題になっていることを確認する。

# 略解

Cの問題について，Lagrange関数を次のように定義する． $x \geq 0, u \in \mathbb{R}$ ．

$$L(y, v, x, u) = v + \langle x, Ay - v\mathbf{1} \rangle + u(1 - \langle \mathbf{1}, y \rangle)$$

ただし  $y, x \not\geq 0$  のとき  $-\infty$  とする．Lagrange 双対問題を導出しよう．

$$\begin{aligned} \omega(x, u) &\equiv \inf_{y \geq 0, v \in \mathbb{R}} L(y, v, x, u) \\ &= u + v(1 - \langle \mathbf{1}, x \rangle) + \inf_{y \geq 0, v \in \mathbb{R}} \langle A^\top x - u\mathbf{1}, y \rangle \\ &= \begin{cases} u & (\langle \mathbf{1}, x \rangle = 1, A^\top x \geq u\mathbf{1}, x \geq \mathbf{0}) \\ -\infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

$\omega(x, u)$  の最大化は確かに R の行動を表現する問題になっている．



- 最適化問題の一般化としての**相補性問題**および**変分不等式問題**
- 変分不等式問題の積分可能性
- 交通ネットワークの均衡問題 (congestion game)