2024後期

均衡分析と数理最適化

均衡問題と変分不等式問題

経済研究所　大澤 実

osawa.minoru.4z@kyoto-u.ac.jp

本日の目的

スカラー値関数最小化問題の一般化として，経済モデルなど**均衡問題**を表現できる**変分不等式問題** (variational inequality problem; VIP) を学ぶ．

- 変分不等式問題の定義を知る．
- 変分不等式問題の様々な等価表現を学ぶ．

経済の均衡問題は単一の関数の最適化としてではなく，様々な主体の最適化行動と，様々な市場における需給均衡条件の組として書かれる．

ここでは，そのような問題を統一的に記述できる変分不等式問題を学ぶ．更に，その等価変換やゲーム理論とのつながりについて議論する．

参考文献

- 講義の底本
  - 福島『非線形最適化の基礎』
  - 土木学会『交通ネットワークの均衡分析』
  - 寒野・土谷『東京大学工学教程　最適化と変分法』
- 副読本
  - Facchinei & Pang『Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems』
  - Cottle, Pang, & Stone『The Linear Complementarity Problem』

変分不等式問題 (variational inequality problem)

定義 空でない閉凸集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ と $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，次の問題を**変分不等式問題**という：

$$\text{Find } x \in S \text{ such that } \langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad (\forall y \in S). \tag{VI}$$

例 凸集合 S の法線錘 $N_S(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, y - x \rangle \leq 0 \ \forall y \in S\}$
$\Rightarrow$ 条件 VI は $-F(x) \in N_S(x)$ と等価

例 凸計画問題の最適性条件．S 上で $F(x) = \nabla f(x)$ なるスカラー値関数 f があれば，$\min_{x \in S} f(x)$ の一次の最適性条件 $-\nabla f(x) \in N_S(x)$ は VI

Quiz f が凸関数ならば，最小化問題と変分不等式問題は**等価**．f が凸関数でなければ等価ではない．なぜか．

直方体上の変分不等式問題

S が次のような**直方体** (rectangle) で与えられる場合が基本的．

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; l_i \le x_i \le u_i \ (i = 1, \ldots, n) \right\}$$
$$l_i \in [-\infty, +\infty), u_i \in (-\infty, +\infty], l_i < u_i$$

Quiz S が直方体なら VI は次の各 i に関する条件と等価であることを示せ：

$$F_i(x)(y_i - x_i) \ge 0 \quad (\forall y_i \in [l_i, u_i], \forall i). \qquad \text{(RecVI)}$$

※ x は全ての i で共通なので各 i は独立ではない

直方体上の変分不等式問題の分割

S が直方体のとき，添字集合 $N \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$ を，適当な変数変換によって次のように一般性を失うことなく分割できる．

$$N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$$

$$N_1 \equiv \{i \in N \mid l_i = -\infty, u_i = \infty\}, \qquad \text{（制約なし）}$$

$$N_2 \equiv \{i \in N \mid l_i = 0, u_i = \infty\}, \qquad \text{（非負制約）}$$

$$N_3 \equiv \{i \in N \mid -\infty < l_i < u_i < \infty\} \qquad \text{（上下限制約）}$$

直方体上の変分不等式問題の分割

$$F_i(x) = 0 \qquad (i \in N_1\text{: 制約なし})$$

$$\begin{cases} x_i \geq 0, F_i(x) \geq 0, \\ x_i > 0 \quad \Rightarrow F_i(x) = 0 \\ F_i(x) > 0 \quad \Rightarrow x_i = 0 \end{cases} \qquad (i \in N_2\text{: 非負制約})$$

$$\begin{cases} l_i \leq x_i \leq u_i, \\ x_i = l_i \quad \Rightarrow F_i(x) \geq 0, \\ l_i < x_i < u_i \quad \Rightarrow F_i(x) = 0, \\ x_i = u_i \quad \Rightarrow F_i(x) \leq 0 \end{cases} \qquad (i \in N_3)$$

Quiz $i \in N_2$ についてRecVIが上述の条件に帰着されることを確認せよ．

包含される問題クラス

- **非線形方程式** $F(x) = \mathbf{0}$

  $N_2 \cup N_3 = \emptyset$，すなわち $S = \mathbb{R}^n$ （$l_i = -\infty, u_i = +\infty$）の場合．
- **非線形相補性問題** (nonlinear complementarity problem; NCP)

$$x_i \geq 0,\ \ F_i(x) \geq 0,\ \ x_i F_i(x) = 0 \quad (\forall i). \qquad \text{(CP)}$$

$$N_1 \cup N_3 = \emptyset\text{，すなわち } S = \mathbb{R}^n_+ \text{ （}l_i = 0, u_i = +\infty\text{）の場合．}$$

線形相補性問題 (linear complementarity problem; LCP)：CP において特に F が affine 関数 $F(x) = Mx + q$ のとき．線形計画問題の最適性条件は LCP．LCP について詳しくは Cottle et al. 参照．

混合相補性問題 (mixed-complementarity problem; miCP)：RecVI を非線形方程式と相補性問題との混合という意味で miCP と呼ぶことがある．RecVI は VI の特殊ケースだから VIP は相補性問題を含む．

補足：相補性問題の記法

一般の相補性問題

$$\begin{cases} x_i \geq 0, F_i(x) \geq 0, \\ x_i F_i(x) = 0 \end{cases}$$

について，簡潔に直交記号 $\perp$ を用いて次のように書くことが多い：

$$0 \leq x \perp F(x) \geq 0$$

相補性問題・変分不等式問題の具体例

Walras均衡

生産活動と財の連関 (input–output) 行列が $A(p) = [a_{ij}(p)]$ で与えられる経済を考える．$a_{ij}(p)$ は財 j の単位生産あたりの生産活動 i の投入量．

生産活動 i について変動費用 c_i，活動水準 $y_i \geq 0$ とし，財 j について初期賦存量 b_j，価格 p_j，需要関数 $d_j(p)$ とする．

財の生産量： $A(p)^\top y$　　　単位生産による利潤： $A(p)p - c$

Quiz 次の条件が一般均衡となる (y, p) を特徴づけることを確認せよ．

$$0 \leq y \perp c - A(p)p \geq 0$$

$$0 \leq p \perp b + A(p)^\top y - d(p) \geq 0$$

非線形計画問題に対するKKT条件

標準的な非線形計画問題：

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize:} \quad f(x) \\
&\text{subject to:} \quad g_i(x) \le 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad\qquad (\lambda_i) \\
&\qquad\qquad\qquad h_i(x) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, l \qquad\qquad (\mu_i)
\end{aligned}
$$

この問題に対するKKT条件は (x, λ, μ) についての**混合相補性問題**.

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = \mathbf{0} \\
&\lambda_i \ge 0,\ \ g_i(\bar{x}) \le 0, \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \\
&h_j(\bar{x}) = 0.
\end{aligned}
$$

多数の連続的・均質な主体による離散的選択

- 1 単位の連続的な主体が存在し，選択肢 $i = 1, 2, \ldots, n$ を選ぶ．
- 選択者数の分布 $x = (x_i)_{i=1}^n$，$x_i \in [0, 1]$ は選択肢 i を採用する人数．
- 選択肢 i の効用は x に依存する関数 $U_i(x)$．（主体は均質）
- 主体は選択肢を変更することで効用を最大化しようとする．

$\bar{x}$ が均衡であるための **Nash 均衡条件**は $V^* = \max_i \{U_i(\bar{x})\}$ として

$$\begin{cases} U_i(\bar{x}) = V^* & \text{if } \bar{x}_i > 0 \\ U_i(\bar{x}) \leq V^* & \text{if } \bar{x}_i = 0 \end{cases} \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\textstyle\sum_i x_i = 1,\ x_i \geq 0 \quad \forall i$$

多数の連続的・均質な主体による離散的選択

Nash 均衡条件は次の相補性問題とみなせる．ただし $V \geq 0$ と仮定する：

$$\text{Find } X \text{ such that } \langle X, F(X)\rangle = 0,\ X \geq \mathbf{0},\ F(X) \geq \mathbf{0},\ \text{where}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ V \end{bmatrix}, F(X) = \begin{bmatrix} V\mathbf{1} - U(x) \\ 1 - \sum_i x_i \end{bmatrix}.$$

この相補性問題は次の $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上の変分不等式問題と等価だった：

$$\text{Find } X \geq \mathbf{0} \text{ such that } \langle F(X), Y - X\rangle \geq 0,\ \forall Y \geq \mathbf{0}.$$

多数の連続的・均質な主体による離散的選択

$S \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i = 1, x_i \geq 0\}$ に制限し，$Y = (y, V')$ とすると

$$\begin{aligned}\langle F(X), Y - X\rangle &= \langle V\mathbf{1} - U(x), y - x\rangle + \langle V' - V, 1 - \textstyle\sum_i x_i\rangle \\ &= \langle -U(x), y - x\rangle \qquad (\because \langle \mathbf{1}, x\rangle = \langle \mathbf{1}, y\rangle = 1)\end{aligned}$$

残る制約は $y \in S, x \in S$．よって結局次の変分不等式問題と等価である：

$$\text{Find } x \in S \text{ such that } \langle -U(x), y - x\rangle \geq 0,\ \forall y \in S.$$

$\boxed{\textbf{Quiz}}$ $n = 2$ の場合で最後の変分不等式の図的意味を確認し，この問題の解が確かに Nash 均衡状態であることを確認せよ．

変分不等式の解の特徴づけ

変分不等式問題に対するKKT条件

一般の変分不等式問題VIについて，S が次のように表現されるとする．

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} g_i(x) \leq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \\ h_i(x) = 0 & i = 1, 2, \ldots, l \end{array} \right\}$$

ただし $\{g_i\}$ は全て凸関数，$\{h_i\}$ は全て線形 (affine) 関数．

適切な**制約想定**のもとで，変分不等式問題VIに対するKKT条件は

$$F(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i \geq 0,\ \ g_i(\bar{x}) \leq 0, \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0,$$

$$h_j(\bar{x}) = 0.$$

例：2選択肢の均衡問題の場合

均衡問題を表現する変分不等式問題を考えよう．$n = 2$とする．

$$\text{Find } x \in S \text{ such that } \langle -U(x), y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in S,$$
$$S = \{x \mid g(x) = x_1 + x_2 = 1, \ x_1, x_2 \geq 0\}.$$

制約関数gの勾配は$\nabla g(x) = (1, 1)$である．対応するLagrange乗数をVとし，また非負制約に対応するLagrange乗数をμ_iとすればKKT条件は次で与えられ，確かに均衡条件に対応する．

$$\begin{bmatrix} -U_1(x) \\ -U_2(x) \end{bmatrix} + V \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\mu_i x_i = 0, \mu_i \geq 0, x_i \geq 0, x_1 + x_2 = 1.$$

変分不等式問題の解の存在と一意性

非線型計画問題において，問題が**凸計画問題**であれば解は存在すれば一意．
では，変分不等式問題において，解の性質のよさを保証する条件はなにか？

定理 **変分不等式の解の一意性の十分条件**．F が S 上で

- **単調** (monotone) ならば VI の解集合は閉凸集合．
- **狭義単調** (strictly ...) ならば VI に解が存在するならば一意．
- **強単調** (strongly ...) ならば VI に解が存在して一意．

復習 微分可能な $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の勾配 ∇f が単調 $\Leftrightarrow$ f が凸．

単調性は積分がないベクトル値関数 F に対して “凸性” を保証する条件．

VI では S は凸集合 $\Rightarrow$ F が単調なら凸計画問題と対応

ベクトル値関数の単調性

定義 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が次の条件を満足するとき，S において**単調**という．

$$\langle x-y, F(x)-F(y)\rangle \geq 0 \quad \forall x,y \in S$$

同様に，次の条件を満足するとき，S において**狭義単調**という．

$$\langle x-y, F(x)-F(y)\rangle > 0 \quad \forall x,y \in S$$

同様に，次の条件を満足するとき，S において**強単調**という．

$$\langle x-y, F(x)-F(y)\rangle \geq \sigma \|x-y\|^2 \quad \forall x,y \in S, \exists \sigma > 0$$

単調性の必要十分条件

定理 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を2階微分可能なベクトル値関数，$S \subset \mathbb{R}^n$ を非空な閉凸集合とする．F が S において

- 単調 $\Leftrightarrow \langle d, \nabla F(x) d \rangle \geq 0 \quad (\forall x \in S, d \in \mathbb{R}^n)$
- 狭義単調 $\Leftrightarrow \langle d, \nabla F(x) d \rangle > 0 \quad (\forall x \in S, d \in \mathbb{R}^n, d \neq \mathbf{0})$
- 強単調 $\Leftrightarrow \langle d, \nabla F(x) d \rangle \geq \sigma \|d\|^2 \quad (\forall x \in S, d \in \mathbb{R}^n, \exists \sigma > 0)$

明らかに強単調 $\Rightarrow$ 狭義単調 $\Rightarrow$ 単調．

復習 凸関数 $\Leftrightarrow \nabla^2 f(x)$ が半正定値，狭義凸関数 $\Leftrightarrow \nabla^2 f(x)$ が正定値．
また，$F(x) = \nabla f(x)$ ならば $\nabla F(x) = \nabla^2 f(x)$．

ベクトル値関数の積分可能性

$S \subset \mathbb{R}^n$ は閉凸集合とし，F は S を含む開集合で定義された 1 階微分可能な $\mathbb{R}^n$ 値関数とする．

$\boxed{\textbf{定理}}$ **積分可能性の必要十分条件**．S 上で ∇F が対称ならば，$\nabla f = F$ を S 上で満足するスカラー値関数 f が存在する．

$\boxed{\textbf{Quiz}}$ 以下で定義される $F = (F_i)$ のそれぞれについて，∇F が対称であることを確認し，$\nabla f = F$ を満足する f を定めよ．

- $F_i(x) = 2x_i$ [**分離可能** (separable) な F]
- $F_i(x) = \sum_j d_{ij} x_j$，$d_{ij} = d_{ji}$ [e.g., 対称な外部性]
- $F_i(x) = \exp(x_i) / \sum_j \exp(x_j)$ [Logit 選択]

積分可能な F に対する VIP には等価な最適化問題が存在．

問題クラスの対応関係　※Sは閉凸とする

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{変分不等式問題}\,(S,\ F)} \arrow[r, Rightarrow, "S=\mathbb{R}^n_+"] \arrow[d, Rightarrow, "F=\nabla f"'] & \boxed{\text{相補性問題}\,(F)} \arrow[dl, Rightarrow, "F=\nabla f"'] \\
\boxed{\text{非線形計画問題}\,(S,\ f)} \arrow[r, Rightarrow, "f\,:\text{convex}"] & \boxed{\text{凸計画問題}\,(S,\ f)}
\end{tikzcd}
$$

- 線形相補性問題
- 非線形相補性問題

Fが単調な変分不等式問題・
相補性問題に対応.

経済システムの一般均衡モデル

経済環境

- n 種類の財および m 種類の生産要素が存在する完全競争経済を考える．
- この経済における一般均衡状態は以下の条件を満足する状態：
  - 財市場の需給均衡条件
  - 生産要素市場の需給均衡条件
  - 企業のゼロ利潤条件（価格の整合性条件）
- 変数等
  - 財の生産量 $x = (x_i)_{i=1}^n$
  - 財の価格 $p = (p_i)_{i=1}^n$,
  - 生産要素の価格 $v = (v_k)_{k=1}^m$
  - 財の需要関数 $f(p, v) = (f_i(p, v))_{i=1}^n$
  - 生産要素の供給関数 $z(p, v) = (z_k(p, v))_{k=1}^m$

一般均衡状態の (x, p, v) を定めたい．簡単のため線形な技術を考えよう．

財市場の需給均衡条件

財 $i = 1, 2, \ldots, n$ について，a_{ij} を財 j の単位供給量あたりに必要な中間投入量とする．また，$A = [a_{ij}]$．

需給均衡条件は

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(p, v) & \text{if } p_i > 0 \\ x_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(p, v) & \text{if } p_i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle p, (I - A)x - f(p, v) \rangle = 0 \\ p \geq 0, (I - A)x - f(p, v) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq p \perp (I - A)x - f(p, v) \geq 0$$

生産要素市場の需給均衡条件

生産要素 $k = 1, 2, \ldots, m$ について，b_{kj} を財 j 単位供給量あたりに必要な投入量とする．また，$B = [b_{kj}]$.

需給均衡条件は

$$
\begin{cases}
z_k(p, v) = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} x_j & \text{if } v_k > 0 \\
z_k(p, v) \geq \sum_{j=1}^{m} b_{kj} x_j & \text{if } v_k = 0
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases}
\langle v, z(p, v) - Bx \rangle = 0 \\
v \geq 0, z(p, v) - Bx \geq 0
\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow 0 \leq v \perp z(p, v) - Bx \geq 0
$$

企業のゼロ利潤条件

生産者のゼロ利潤条件は

$$\begin{cases} p_i x_i - \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} p_j + \sum_{k=1}^m v_k b_{ki}\right) x_i = 0 & \text{if } x_i > 0 \\ p_i x_i - \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} p_j + \sum_{k=1}^m v_k b_{ki}\right) x_i \leq 0 & \text{if } x_i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} p_j + \sum_{k=1}^m v_k b_{ki} = 0 & \text{if } x_i > 0 \\ p_i - \sum_{j=1}^n a_{ji} p_j + \sum_{k=1}^m v_k b_{ki} \leq 0 & \text{if } x_i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, B^\top v - (I - A)^\top p \rangle = 0 \\ x \geq 0, B^\top v - (I - A)^\top p \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \perp B^\top v - (I - A)^\top p \geq 0$$

非線形相補性問題表現

次の条件を満足する (x, p, v) が一般均衡状態である．

$$
\begin{aligned}
&0 \leq x \perp B^\top v - (I - A)^\top p \geq 0 \\
&0 \leq p \perp (I - A)x - f(p, v) \geq 0 \\
&0 \leq v \perp z(p, v) - Bx \geq 0
\end{aligned}
$$

これはNCP(F)．状態変数 $X = (x, p, v) \in \mathbb{R}_+^{2n+m}$，ベクトル場 F は

$$
F(X) = \begin{bmatrix} & B^\top & -(I - A)^\top \\ -B & & \\ I - A & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ z(p, v) \\ -f(p, v) \end{bmatrix}
$$

変分不等式問題表現 (Quantity–Price VIP)

NCP は実行可能領域が非負象限で与えられる VIP であった．

$$\langle F(X), Y - X \rangle \geq 0 \qquad \forall Y \in \mathbb{R}_{+}^{2n+m}$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} & B^{\top} & -(I-A)^{\top} \\ -B & & \\ I-A & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ z(p,v) \\ -f(p,v) \end{bmatrix}$$

これは**数量変数** (quantity variable) と**価格変数** (price variable) が混在した問題．それぞれの質的に異なる変数のみを考える問題に帰着可能．

変分不等式問題表現 (Price-based VIP)

一般均衡問題は次の価格変数のみの VIP と等価：

$$
\text{Find } X_{\mathrm{D}} \in S_{\mathrm{D}} \text{ such that } \langle F_{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{D}}), Y_{\mathrm{D}} - X_{\mathrm{D}} \rangle \geq 0 \quad \forall Y_{\mathrm{D}} \in S_{\mathrm{D}},
$$

$$
X_{\mathrm{D}} \equiv \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}, F_{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{D}}) \equiv \begin{bmatrix} z(p, v) \\ -f(p, v) \end{bmatrix},
$$

$$
S_{\mathrm{D}} \equiv \left\{ (v, p) \in \mathbb{R}_{+}^{n,m} \;\middle|\; B^{\top} v = (I - A)^{\top} p \right\}.
$$

もとの F の x に対応する部分を等式制約として導入.

変分不等式問題表現 (Price-based VIP) の導出

$Y = (\hat{x}, \hat{v}, \hat{p})$，$Y_{\mathrm{D}} = (\hat{v}, \hat{p})$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\langle F(X), Y - X \rangle \\
&\quad = \langle -Bx, \hat{v} - v \rangle + \langle z, \hat{v} - v \rangle + \langle (I - A)x, \hat{p} - p \rangle - \langle f, \hat{p} - p \rangle \\
&\quad = \langle -x, B^{\top}(\hat{v} - v) \rangle + \langle z, \hat{v} - v \rangle \\
&\qquad + \langle x, (I - A)^{\top}(\hat{p} - p) \rangle - \langle f, \hat{p} - p \rangle \\
&\quad = \langle z, \hat{v} - v \rangle - \langle f, \hat{p} - p \rangle = \langle F_{\mathrm{D}}(X_{\mathrm{D}}), Y_{\mathrm{D}} - X_{\mathrm{D}} \rangle \geq 0
\end{aligned}
$$

※ $f = f(p, v)$，$z = z(p, v)$ であり (p, v) の関数だが略記．f, z の逆関数を用いれば，同様に x のみの VIP (quantity-based VIP) を構築可能．

分離可能性と均衡の一意性

- 仮定：z と f がそれぞれ分離可能：$z_i = z_i(v_i)$，$f_i = f_i(p_i)$
- 前提：供給関数について $z_i'(\cdot) > 0$，需要関数について $f_i'(\cdot) < 0$

このとき F の Jacobi 行列は

$$\nabla F(X) = \begin{bmatrix} & B^\top & -(I-A)^\top \\ -B & \nabla z(v) & \\ I-A & & -\nabla f(p) \end{bmatrix}$$

従って任意の $0 \neq (\delta_x, \delta_v, \delta_p) \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ について

$$\begin{aligned} \delta^\top \nabla F(X) \delta &= \delta_v^\top \nabla z(v) \delta_v - \delta_p^\top \nabla f(p) \delta_p \\ &= \sum_{k=1}^m z_k'(v_k) \delta_{v,k}^2 - \sum_{i=1}^n f_i'(p_i) \delta_{p,i}^2 > 0 \end{aligned}$$

相補性問題・変分不等式問題の数値解法

- 福島・山下 “相補性問題と変分不等式問題に対するメリット関数”

メリット関数法

NCP・VIP は，等価な制約なし・制約つき最適化問題に再定式化して解くことが多い．このときの目的関数を**メリット関数** (merit function) と呼ぶ．

LCP にはメリット関数法以外にも **Lemke 法**や**内点法**など様々な効率的アルゴリズムが存在する．

メリット関数が持っていて欲しい望ましい性質：

- 微分可能である．
- 停留点がもとの問題の解となる．
- 問題のエラーバウンドを与えられる．
- レベル集合が有界である．

ギャップ関数 (gap function)

ギャップ関数は，以下で定義される関数である．

$$g(x) = \sup_{y \in S} \langle F(x), x - y \rangle$$

- S が有界であれば明らかに g は S 上で有界．
- $g(x) \geq 0$ $\qquad \because F_i(x)(x_i - y_i) < 0$ なら $y_i := x_i$
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x$ はVIP の解 $\qquad \because \langle F(x), x - y \rangle \leq 0 \ \ \forall y \in S$

よってギャップ関数の最小化問題 $\min_{x \in S} g(x)$ はVIP と等価であり，ギャップ関数はメリット関数．

ただし，ギャップ関数は微分不可能であり最適化するのは困難
$\Rightarrow$ 微分可能性を保証した**正則化ギャップ関数** (regularized gap function)

ギャップ関数と最適応答

均質主体の離散選択を考え，S が確率単体である場合を考えよう．このとき利得関数を U とすると $F(x) = -U(x)$ であった．

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sup_{y \in S} \langle -U(x), x - y \rangle \\
&= \underbrace{\sup_{y \in S} \langle U(x), y \rangle}_{\text{最適応答のもとでの期待効用}} - \underbrace{\langle U(x), x \rangle}_{\text{現在の期待効用}} \\
&= \max_i \{U_i(x)\} - \langle U(x), x \rangle .
\end{aligned}
$$

$g(x) = 0$ が Nash 均衡に対応することが確認できる．

等価な不動点問題と微分可能なメリット関数

VIP(S, F) に対して次の写像を考える：

$$H(x) = \mathrm{Proj}_S\,(x - F(x)) \equiv \operatorname*{arg\,min}_{x \in S} \|x - F(x)\|$$

定理 x がVIP の解であることと x が H の不動点であることとは等価.

定理 次の関数はVIP(S, F) に対する微分可能なメリット関数になる：

$$f(x) = -\langle F(x), H(x) - x\rangle - \frac{1}{2}\|H(x) - x\|^2$$

$d(x) = H(x) - x$ は，$x \in S$ における f の降下方向を与える．この $d(x)$ による反復法は進化ゲーム理論の**射影動学** (projection dynamics) に対応.

時間の許す限り応用トピックに触れていきます.

- 集団ゲーム (population game) および進化ダイナミクス
- 交通ネットワークの均衡問題 (congestion game)
- 線形計画問題とマッチング
- 経済地理学モデル（NEG系）
- 都市経済学モデル（Fujita–Ogawa）