2024後期

均衡分析と数理最適化

都市モデル

経済研究所　大澤 実

osawa.minoru.4z@kyoto-u.ac.jp

目的

都市経済学モデルを変分不等式・相補性問題，および集団ゲーム理論の観点から議論する．

- 都市モデルは付け値地代 (bid rent) 関数を考えるのが標準的になっている．付け値地代アプローチは双対型の相補性問題と対応付けられる．
- 土地消費は人口集積に対する分散力として働き，また離散選択モデルとも対応付けられる．逆に言えば，離散選択モデルは分散力として捉えることができる．
- 集積の経済を追加したモデルもシンプルなケースでは積分可能な問題（ポテンシャル・ゲーム）になる．

都市経済学の基本モデル

Alonso–Muth–Mills モデル

Alonso–Muth–Mills モデル　　see: Fujita (1989)

通勤費用と地代とのトレードオフで都市内の労働者の居住パターンを表現

混雑のみのモデル $\Rightarrow$ 問題の構造として凸性を持つ

状況設定：

- 1 単位の連続的な労働者が存在する離散空間を考える
- 居住地 $i = 1, 2, \ldots, n$，土地供給量 A_i，通勤費用 c_i
- $i = 0$ に CBD (central business disttrict) が存在し，全員そこへ通勤
- 簡単のため，効用は z を合成財消費量・a を土地消費量として準線形

$$u(z, a) = z + f(a) \qquad f' > 0, f'' < 0, \lim_{a \to 0} f(a) = -\infty$$

予算制約 $z + ra \leq y - c_i$（y は十分大きい）

Quiz 消費者の効用最大化問題を解き間接効用関数を求めよ．

間接効用

$z = y - c_i - ra$ になることを使って解いてしまおう．

$$u(a) \equiv y - c_i - ra + f(a) \quad \Rightarrow u'(a) = -r + f'(a)$$

$f'' < 0$ なので最適性の必要十分条件は $u' = 0$．特に，$r > 0$．

居住地 i の土地市場の均衡条件は，居住人数を x_i，土地消費を a_i として

$$\begin{cases} x_i a_i = A_i & (r_i > 0) \\ x_i a_i \leq A_i & (r_i = 0) \end{cases} \quad \Rightarrow a_i = A_i / x_i \quad (\because r_i > 0)$$

また，最適性条件より $r_i = f'(A_i / x_i)$

間接効用

従って，消費者の居住地人口x_iを変数とする間接効用は

$$v_i(x_i) = y - c_i + g(A_i/x_i) \qquad g(a) \equiv f(a) - af'(a)$$

明らかにvは分離可能．従って，次の最適化問題が立地均衡と等価：

$$\text{minimize:} \quad -\sum\nolimits_{i=1}^{n} \int_0^{x_i} v_i(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$\text{subject to:} \ \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i = L, \ x_i \geq 0$$

$\boxed{\textbf{Quiz}}$ この均衡問題の解が存在すれば一意であることを確認せよ．

解 目的関数のHesse行列は$-\mathrm{diag}[v_i'(x_i)]$である．ところで

$$v_i'(x_i) = -\frac{A_i}{x_i^2} g'(A_i/x_i)$$
$$g'(\cdot) = f'(\cdot) - af''(\cdot) > 0$$

であるから$v_i'(x_i) < 0$であり，目的関数は凸関数．

（＝同じ地点に居住する人が多ければ多いほど間接効用が減少する）

等価最適化問題は凸計画問題 $\Rightarrow$ 従って解は存在すれば一意である．

Quiz 混雑ゲームと全く同じ構造であることを確認し，双対問題を示せ．

$\boxed{\text{例}}$ $f(a) = \alpha \log a$．$f'(a) = \alpha/a$より$g(a) = \alpha \log a - \alpha$．よって

$$v_i(x_i) = y - \alpha - c_i - \alpha \log \frac{x_i}{A_i}.$$

よって等価最適化問題の目的関数は（定数を除くと）

$$-\sum_i (y - \alpha - c_i + \alpha \log A_i) - \alpha \sum_i x_i \log x_i$$

解は$x_i = 0$が不適より全iについて$v_i(x_i) = \bar{v}$だから

$$x_i = A_i \exp(\alpha^{-1}(y - c_i - \alpha - \bar{v}))$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{A_i \exp(-\alpha^{-1} c_i)}{\sum_k A_k \exp(-\alpha^{-1} c_k)} L$$

拡張：交通混雑

居住地が線上に順々に並んでいると考え，居住地 i から $i-1$ への交通費用を t_i とする．このとき $c_i = t_i + t_{i-1} + \cdots + t_1$ になる．

交通ネットワークのモデルと同様，t_i が交通量に依存する増加関数だとしよう．すなわち

$$t_i = t_i(x) = t_i(x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n)$$

Quiz このモデルに対する等価最適化問題が存在するか確認し，存在するならば与えよ．また，解の特徴を述べよ．

余談 渋滞と混雑

混雑ゲームでは，リンクの利用量に応じて増加関数として交通**混雑**を考えるが，道路の**ボトルネック**（e.g.，橋，高需要の交差点）は明示的に考えていない $\Rightarrow$ ラッシュアワーの**渋滞**は原理的に考えられない．

ボトルネック・モデルは動的な渋滞を考えるモデル (Vickrey, 1969)

状況設定：居住地選択を固定し，通勤者がいつ自宅を出発するかを考える．

- 居住地と CBD の間には単位時間キャパシティ μ のボトルネック
  それ以上の交通フローが流入すると**待ち行列**が発生
- 通勤者には**希望到着時刻** t^* が存在（始業時刻など）
  そこからずれるほどペナルティが発生

$\Rightarrow$ 待ち行列遅れと到着時刻のずれとのトレードオフで出発時刻を選択

都心の形成

Beckmann モデル

概要

AMM モデルの立地パターンの非対称性 $=$ CBD に全員が通勤する仮定

Beckmann モデル：CBD を明示的に仮定せず，その形成をシンプルに表現

企業の利得関数：

$$v_i(x) = \sum_j \phi_{ij} x_j - c_i(x_i).$$

- $\phi_{ij} \in (0,1)$ を j から i への**正の外部性**の強さ
- $c_i(\cdot)$ は地点 i の**混雑外部性**．$c_i'(\cdot) > 0$．
  オリジナル論文では $c_i(x_i) = \alpha \log x_i$ を仮定
- “microfoundation” を与えることも可能

等価最適化問題

AMM モデルと異なり，Beckmann モデルの v は分離可能ではない．

しかし，外部性が対称ならば等価最適化問題が存在．$D = [\phi_{ij}]$ として

$$\nabla v(x) = D - \mathrm{diag}[c'(x_i)]$$

$\Rightarrow$ D が対称（$\phi_{ij} = \phi_{ji}$）ならば $\nabla v(x)$ は対称．

具体的には，対応する最適化問題は

maximize: $\frac{1}{2}x^\top Dx - \sum_i \int_0^{x_i} c(\omega)\mathrm{d}\omega$

subject to: $\sum_i x_i = L,\ x_i \geq 0$

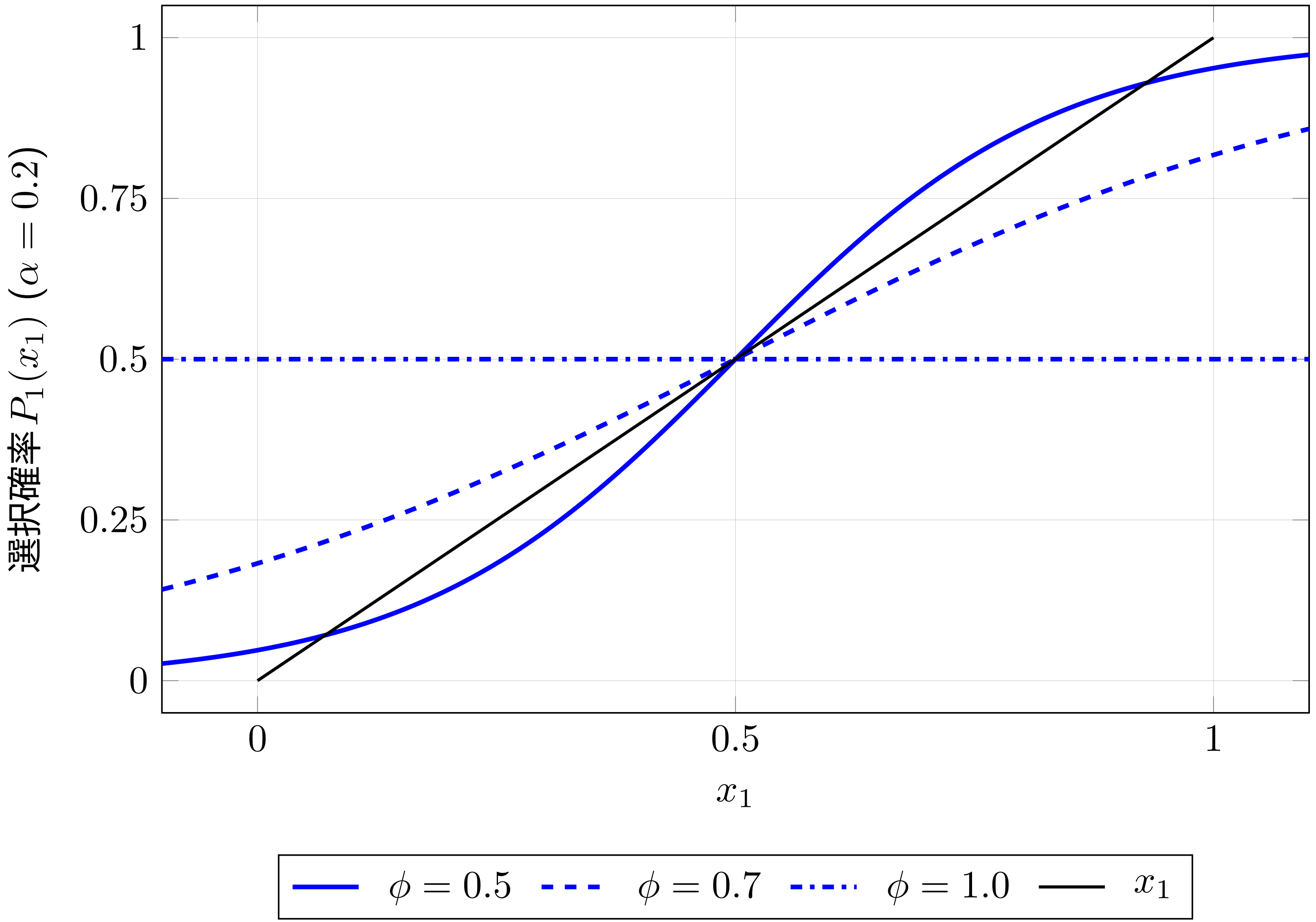
$\boxed{\textbf{例}}$ $c(x) = \alpha \log x$ ならば最適化問題は

$$\text{maximize:}\quad \tfrac{1}{2}x^\top Dx - \alpha \textstyle\sum_i x_i \log x_i$$
$$\text{subject to:}\quad \textstyle\sum_i x_i = L,\ \ x_i \ge 0$$

であり，その解は $E_i(x) \equiv \sum_j \phi_{ij} x_j$ として次の**不動点問題**の解：

$$x_i = P_i(x)L \qquad\qquad P_i(x) = \frac{\exp(\alpha^{-1}E_i(x))}{\sum_k \exp(\alpha^{-1}E_k(x))}$$

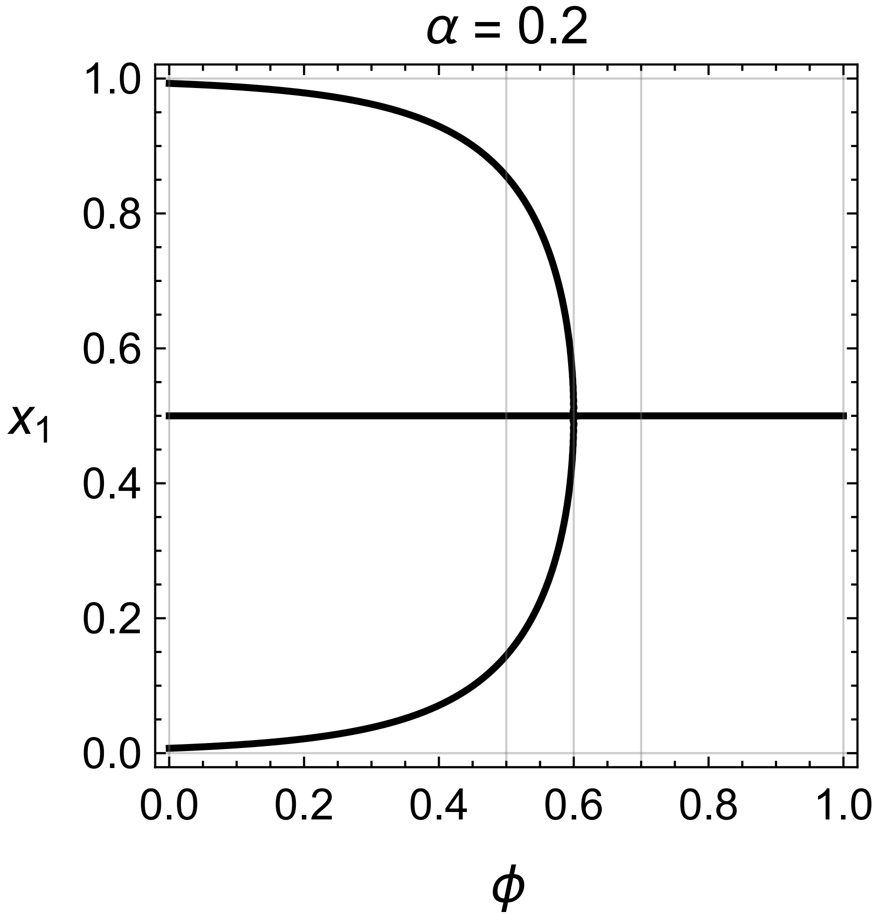
$\boxed{\textbf{Quiz}}$ 2地点モデルを考える．$L = 1, \phi_{ii} = 1, \phi_{ij} = \phi_{ji} = \phi$ とするとき，異なる α のレベルに対応する不動点の挙動を考察してみよ（横軸に x_1 をとり，関数 x_1 および $P_1(x)$ のグラフを描いて考えればよい）



Quiz 解が 3 つ存在する条件を求めよ．

対称２地点ケースの解曲線

$P_1'(x_1) = 1$ より $\phi^* = 0.6$ と求められる：



均衡の一意性

利得関数の Jacobi 行列 ポテンシャルの Hesse 行列 $\times -1$)：

$$\nabla v = D - \mathrm{diag}[c'(x_i)]$$

が実行可能領域上で常に負定値であれば解は一意．

$\boxed{\textbf{Quiz}}$ $c(x) = \alpha x$ ならば，対応する最適化問題は $A = D - \alpha I$ として

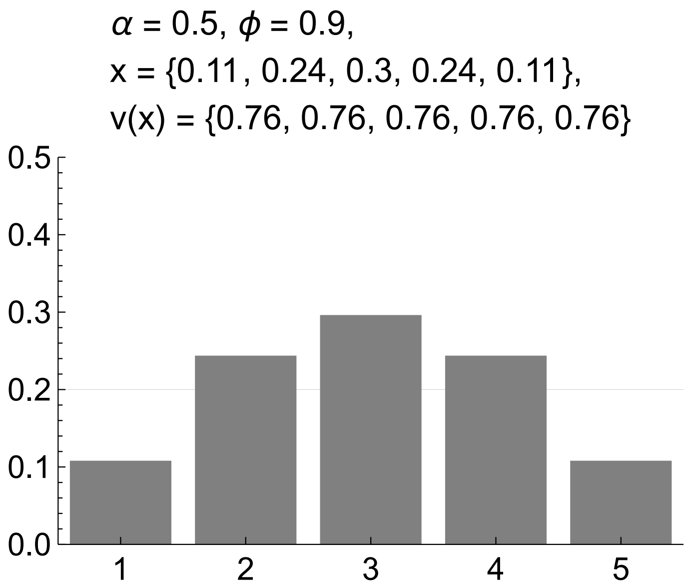
$$\text{maximize: } \tfrac{1}{2}x^\top Dx - \tfrac{\alpha}{2}\textstyle\sum_i x_i^2 = \tfrac{1}{2}x^\top Ax$$

A が**条件付き負定値**ならばこの問題は凸計画問題であり，解は一意．

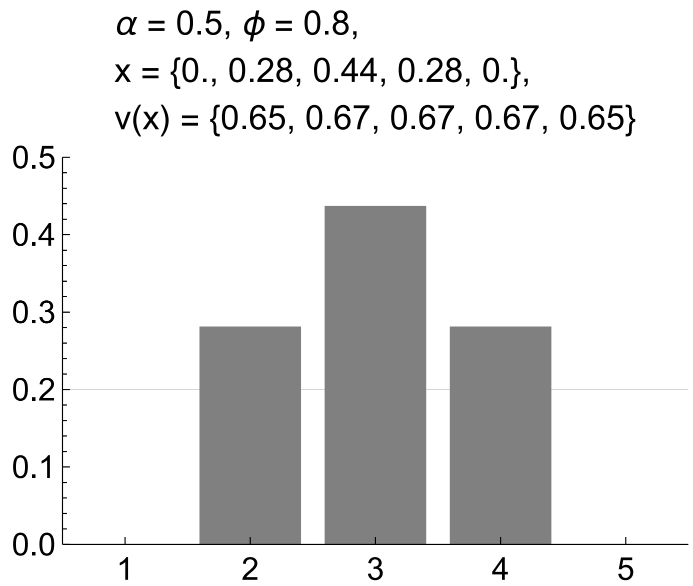
$\boxed{\textbf{Quiz}}$ 内点解なら $x = \bar{v}A^{-1}\mathbf{1}$（$\bar{v}$：定数）となることを確認せよ．

線分5地点の集積形成 ($\phi_{ij} = \phi^{\ell_{ij}}$, $c(x_i) = \alpha x_i$)

$$[\ell_{ij}] = \mathrm{Toeplitz}(0,1,2,3,4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



内点解



端点解（不安定）

居住地区と業務地区の形成

Ogawa–Fujita モデル

モデル

企業と労働者の相互作用による都市構造形成

企業分布 $m = (m_i)$，労働者の居住・通勤パターン $n = (n_{ij})$

$\Rightarrow$ 人口分布 $N = (N_i), N_i = \sum_j n_{ij}$

土地市場・労働市場の均衡 $\longrightarrow$ 地代 r_i・賃金 w_i

企業の利得関数： $\pi_i = \underbrace{F_i(m)}_{\text{売上：集積の経済を仮定}} - w_i \underbrace{L}_{\text{労働需要}} - r_i \underbrace{s^{\mathrm{f}}}_{\text{土地需要}}$

仮定：$\nabla F(\cdot)$ は全ての m に対して正定値 $\cdots$ **集積の経済**

例：$F_i(m) = \bar{F}_i m_i^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$

$$F_i(m) = \bar{F}_i \sum_j \phi_{ij} m_j \quad ([\phi_{ij}]\text{：正定値})$$

モデル

労働者の効用：$v_{ij} = w_j - \underbrace{td_{ij}}_{\text{通勤費用}} - r_i \underbrace{s^{\mathrm{w}}}_{\text{土地需要}}$

前提：d_{ij}：ij 間の物理的距離，$t, L, s^{\mathrm{f}}, s^{\mathrm{w}}$ は定数，土地供給 a_i

均衡状態：企業の利潤最大化行動（立地選択）・労働者の効用最大化行動（居住地・勤務先選択）・市場均衡（賃金・地代）と整合的な (M, n, w, r)

- 企業間の**集積の経済**が存在
  $\Rightarrow$ 業務地区が内生的に形成される（cf. Beckmann モデル）
- 企業・労働者が土地市場で競合，最も高い地代を支払う主体が利用
  $\Rightarrow$ 業務地区・居住地区の別が均衡で決まる

均衡条件を表すNCP

$$0 \leq n_{ij} \perp \bar{v} - (w_j - td_{ij} - r_i s^{\mathrm{w}}) \geq 0$$

$$0 \leq m_j \perp \pi_j = F_j(m) - w_j L - r_j s^{\mathrm{f}} \leq 0$$

$$0 \leq r_i \perp a_i - s^{\mathrm{w}} \sum\nolimits_j n_{ij} + s^{\mathrm{f}} m_i \geq 0$$

$$0 \leq w_j \perp \sum\nolimits_i n_{ij} - L m_j \geq 0$$

$$0 \leq \bar{v} \perp N - \sum\nolimits_{ij} n_{ij} \geq 0$$

Ogawa–Fujita は $F_i(m) = \bar{F} - \tau \sum_j d_{ij} m_j$ と特定化 $\Rightarrow$ LCP に帰着

$\boxed{\textbf{Quiz}}$ $d_{ij} = d_{ji}$ とする．市場均衡条件の実行可能性役を満足する (m, n) に実行可能領域を制限することで，LCP を最適化問題に帰着せよ．

均衡の特徴づけ

$d_{ij} = d_{ji}$ のとき，Ogawa-Fujita モデルは以下の最適化問題に帰着：

$$
\begin{aligned}
\max_{(m,n)\geq 0} \quad & -\frac{\tau}{2} m^\top D m - t \textstyle\sum_{ij} d_{ij} n_{ij} & & \\
\text{s.t.} \quad & a_i \geq s^{\mathrm{w}} \textstyle\sum_j n_{ij} + s^{\mathrm{f}} m_i & \forall i \quad & (r_i) \\
& \textstyle\sum_i n_{ij} \geq L m_j & \forall j \quad & (w_j) \\
& \textstyle\sum_{ij} n_{ij} = N & & (\bar{v})
\end{aligned}
$$

Quiz 均衡の一意性が成立する条件を確認せよ．

Quiz ２地点のケースで均衡解を求め，直感的意味を説明せよ．

なお，$a_1 = a_2 = 1$，$L = 1$，$\tau = 1$，$N = 1$，$d_{12} = d_{21} = 1$，$s^{\mathrm{w}} = s^{\mathrm{f}} = 1$とする．また，対称性より$m_1 \geq m_2$として考えてよい．