2024後期

均衡分析と数理最適化

均衡選択

経済研究所　大澤 実

osawa.minoru.4z@kyoto-u.ac.jp

目的

複数均衡が存在するもとでの均衡選択について学ぶ．

- 決定論的進化ダイナミクス (deterministic evolutionary dynamics) と均衡の局所安定性・大域収束性を理解する．
- 確率論的進化ダイナミクス (stochastic evolutionary dynamics) と定常確率，均衡の確率安定性を理解する．

底本：Sandholm W. H. (2010). ***Population Games and Evolutionary Dynamics***. MIT Press.

決定論的な進化ダイナミクス

決定論的進化ダイナミクス

- 集団ゲームに対する調整過程を表す微分方程式系

  $$\dot{x} = V(x) = V(x, F(x))$$

- 成立しがちな性質
  - PC ("Positive correlation"): $\langle F(x), V(x) \rangle > 0 \quad \forall x \in X$
  - NS (Nash 停留性): $V(x) = 0 \implies x$ は Nash 均衡

例	連続性	PC	NS
複製動学	yes	yes	**no**
Brown–von Neumann–Nash 動学	yes	yes	yes
Smith 動学	yes	yes	yes
最適応答動学	**no**	(yes)	(yes)
Logit 動学	yes	**no**	**no**
射影動学	**no**	yes	yes

復習 決定論的進化ダイナミクスの例

複製 (replicator) 動学：

$\dot{x}_i = x_i \hat{F}_i(x)$　ただし　$\hat{F}_i(x) = F_i(x) - \bar{F}(x)$　ただし $F(x)$ は利得関数

Brown–von Neumann–Nash 動学：

$$\dot{x}_i = \left[\hat{F}_i(x)\right]_+ - x_i \sum_k \left[\hat{F}_k(x)\right]_+$$

最適応答 (best response) 動学：

$\dot{x} \in \mathrm{BR}(F(x)) - x_i$

Logit 動学：

$\dot{x}_i = P_i(x) - x_i$　または　$\dot{x} = P(x) - x$

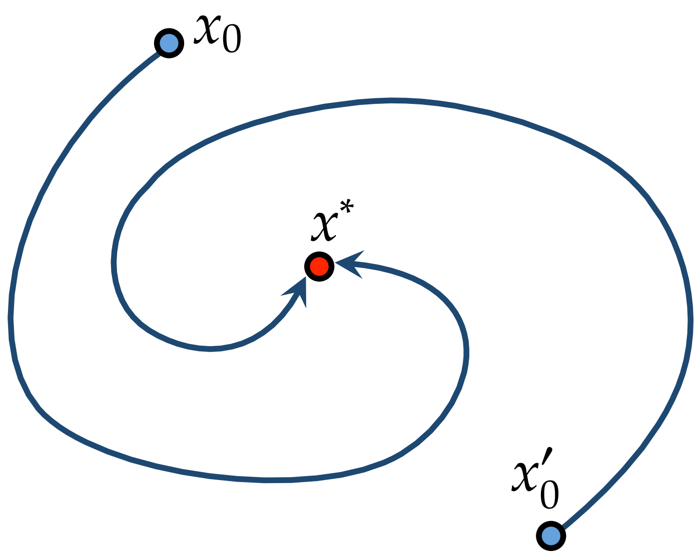
（ただし $P(x)$ は logit 型の選択確率）

均衡への大域的収束性

大域的収束性

微分方程式系の大域的収束性（**大域的安定性**）

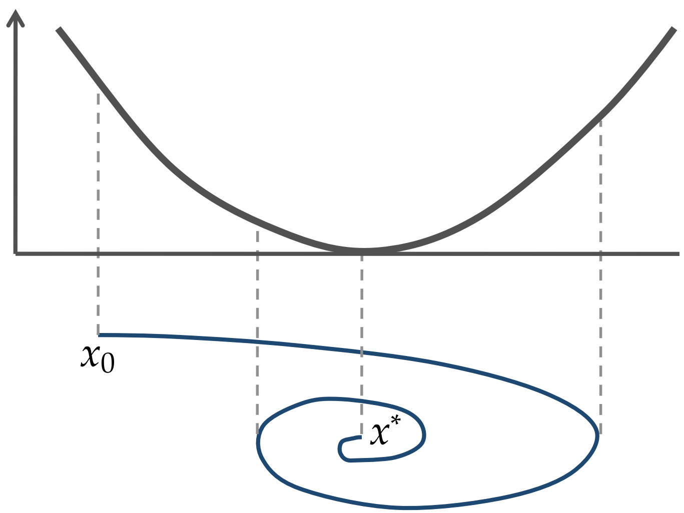
- 任意の初期点からの解軌道が，何らかの**極限集合**に収束すること
- 進化ダイナミクスが大域的に何らかの集合に収束するならその集合は「かなりもっともらしい」均衡点の集合と考えられる



大域的収束性とLyapunov関数

動的システムの大域的安定性の**十分条件**: **Lyapunov関数**の存在

- **Lyapunov関数**：均衡点において0，それ以外の場所で正の値を取る関数であって，**全ての**解軌道に沿って減少する関数．



どのゲームとダイナミクスに対してLyapunov関数を構築可能か？

残念ながら，Lyapunov関数を構築する一般的な方法はない．

ポテンシャルゲーム

復習 $\nabla f(x) = F(x)$ なるスカラー関数 f が存在するとき，集団ゲーム U をポテンシャル・ゲームと呼ぶのだった．

※　この条件は一般化可能：$\nabla f(x) = \mathrm{Proj}_X[F(x)]$ であればよい
（状態空間上でどう見えるかだけが問題）

PC を満足する進化ダイナミクスではポテンシャル関数は Lyapunov 関数！

$$\dot{f}(x) = \langle \nabla f(x), \dot{x} \rangle = \langle (x), V(x) \rangle > 0$$

$\Rightarrow$　ポテンシャルゲームでは，PC を満足する進化ダイナミクスは均衡点に**大域的に収束する**．

Logit 動学

Logit 動学は PC を満足せず，また停留点はNash 均衡ではない
（停留点は Logit 均衡になる → 補足資料参照）

しかし，ポテンシャル関数 f を修正することでLyapunov 関数を構築可能．

サイズ 1 の単一集団の場合，エントロピー関数を v とすれば次の関数が
Logit 動学のLyapunov 関数となる：

$$\tilde{f}(x) = f(x) + v(x).$$

他のランダム効用モデルへも一般化可能（補足資料参照）

$\boxed{\text{例}}$ 射影動学・複製動学

Nash 均衡点 $\bar{x}$ **を所与とすれば** 次の関数が Lyapunov 関数となる:

射影動学

$$E_{\bar{x}}(x) = |x - \bar{x}|^2$$

複製動学

$$H_{\bar{x}}(x) = -\sum_{i : x_i > 0} \bar{x}_i \log \frac{x_i}{\bar{x}_i}$$

※ 均衡への収束性の議論には使えるが均衡を求めるためには使えない.

メリット関数と射影動学のLyapunov関数

メリット関数：$H(x) \equiv \mathrm{Proj}_X(x + U(x))$ として

$$G(x) = \langle U(x), x - H(x) \rangle - \frac{1}{2}\|x - H(x)\|^2$$

- 均衡点 $\bar{x}$ の情報を必要としない

射影動学の Lyapunov 関数

$$E_{\bar{x}}(x) = \left| x - \bar{x} \right|^2$$

- 均衡点からの距離：均衡点 $\bar{x}$ の情報が必要

安定ゲーム

動学ごとにLyapunov関数を構築可能（証明省略）

	Formula	Lyapunov Function
射影動学	$\dot{x} = \mathrm{Proj}_{TX(x)}(F(x))$	$E_{x^*}(x) = \lvert x - x^* \rvert^2$
複製動学	$\dot{x}_i = x_i \hat{F}_i(x)$	$H_{x^*}(x) = \Sigma_{i \in S(x^*)} x_i^* \log \dfrac{x_i^*}{x_i}$
最適応答動学	$\dot{x} \in M(\hat{F}(x)) - x$	$G(x) = \mu(\hat{F}(x))$
Logit	$\dot{x} \in \tilde{M}(\hat{F}(x)) - x$	$\tilde{G}(X) = \tilde{\mu}(\hat{F}(x)) + v(x)$
BNN	$\dot{x}_i = [\hat{F}_i(x)]_+ - x_i \Sigma_{j \in S} [\hat{F}_j(x)]_+$	$\Gamma(x) = \dfrac{1}{2} \Sigma_{i \in S} [\hat{F}_i(x)]_+^2$
Smith	$\dot{x}_i = \Sigma_{j \in S} x_j [F_i(x) - F_j(x)]_+$ $- x_i \Sigma_{j \in S} [F_j(x) - F_i(x)]_+$	$\Psi(x) = \dfrac{1}{2} \Sigma_{i \in S} \Sigma_{j \in S} x_i [F_j(x) - F_i(x)]_+^2$

※ Sandholm (2010) Ch. 7 参照

大域的収束性まとめ

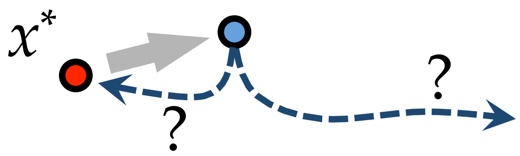
ポテンシャルゲームにおいては多くの進化ダイナミクスは大域的に均衡点に収束する（ポテンシャル関数が Lyapunov 関数の定義を満足）

今回は触れなかったが，安定ゲーム (stable game / contractive game) においても均衡へ大域的に収束する（それぞれのダイナミクスに対して Lyapunov 関数を構築可能）
$\Rightarrow$ Sandholm (2010) Ch. 7 参照

局所的安定性

局所安定性

ある均衡点は**局所的に漸近安定か？**　＝ ある均衡点 $\bar{x}$ に対して何らかの撹乱が生じたとき（$x = \bar{x} + \epsilon$），同じ均衡点に戻ってくるか？



もし戻ってこないならば，その均衡は「たまたま」実現した状態
$\Rightarrow$ モデルの均衡についての理論的・定量的含意を議論する前提にできない

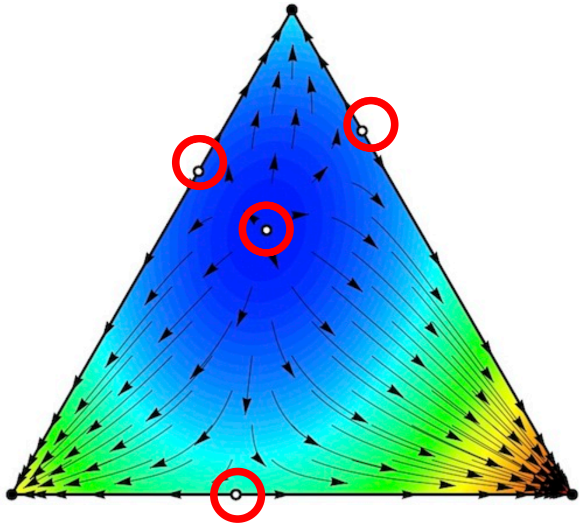
※ このような均衡は安定に実現できない，というような含意を除く

$\boxed{\text{例}}$ 集積力がある空間モデルでは，GMM で推定したパラメタのもとで観測人口分布が局所不安定な場合がある．

局所(不)安定性の具体例

複製動学の Nash 均衡でない停留点：

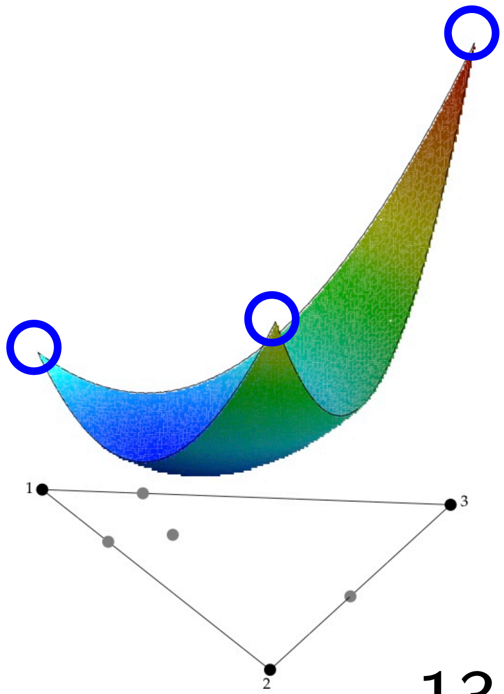
- 局所不安定
- 内点から始まったどの解軌道も到達しない



Example: Replicator dynamic

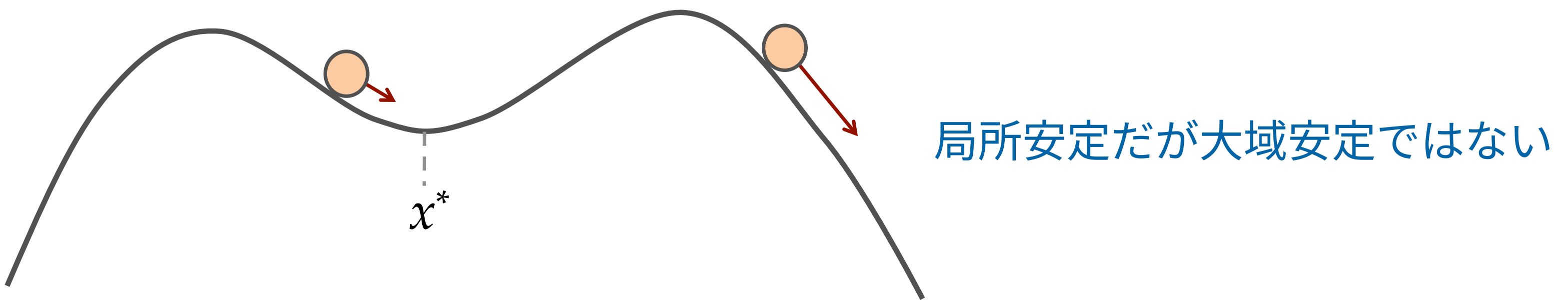
ポテンシャル・ゲームの安定な Nash 均衡点：

- ポテンシャル関数を局所最大化
- NS+PC を満足する動学のもとで漸近安定



局所安定性と大域的安定性

局所安定性は大域的安定性を保証しない:



しかし，もし大域安定性が判定できないなら，局所安定性は Nash 均衡の妥当性を判定する基準になり得る

以降では，2 通りの方法で局所安定性を解析する:

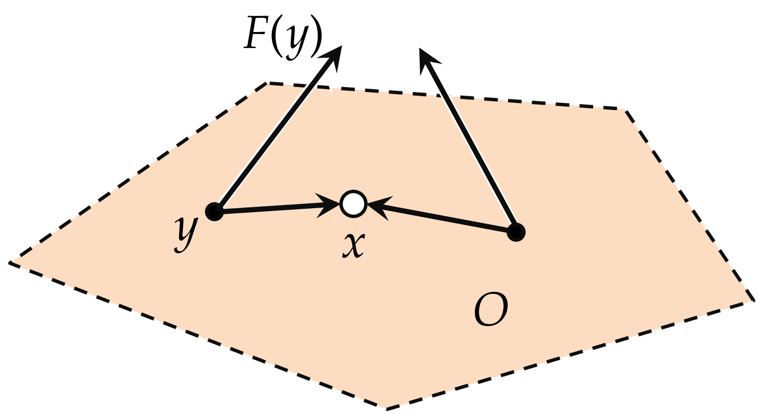
- **正則 ESS**：局所的 Lyapunov 関数を構築可能
- **線形近似**：固有値解析によって局所 (不) 安定性を判定可能

ESS (Evolutionarily Stable States)

$\boxed{\textbf{定義}}$ 均衡 x に次の条件を満たす近傍 O が存在するとき x を **ESS** と呼ぶ：
$\forall y \in O \setminus \{x\}, \langle y - x, F(x)\rangle = 0 \Rightarrow \langle y - x, F(y)\rangle < 0.$ つまり

$$\langle y - x, F(y)\rangle < 0 \quad \forall y \in O \setminus \{x\}$$

*single population のとき ESS，multi-population のとき Taylor ESS と呼ばれる



- 局所安定性の十分条件はより強い条件： 正則 (regular) (Taylor) ESS

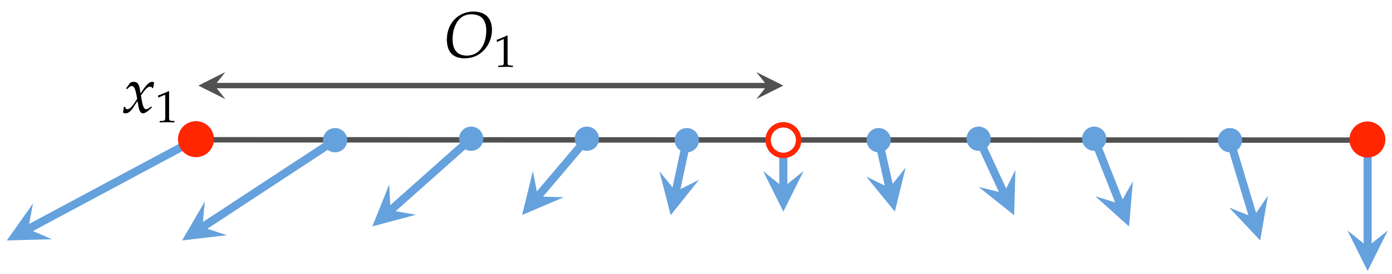
ESSによる安定性の特徴づけ

定義 均衡 x に次の条件を満たす近傍 O が存在するとき x を **ESS** と呼ぶ：
$\forall y \in O \setminus \{x\}, \langle y - x, F(x)\rangle = 0 \Rightarrow \langle y - x, F(y)\rangle < 0.$ つまり

$$\langle y - x, F(y)\rangle < 0 \quad \forall y \in O \setminus \{x\}$$

定理 $\bar{x}$ が **ESS** なら，複製動学・射影動学のもとで局所的に**漸近安定**.

- ESS は Nash 均衡以外の停留点を含まないことに注意



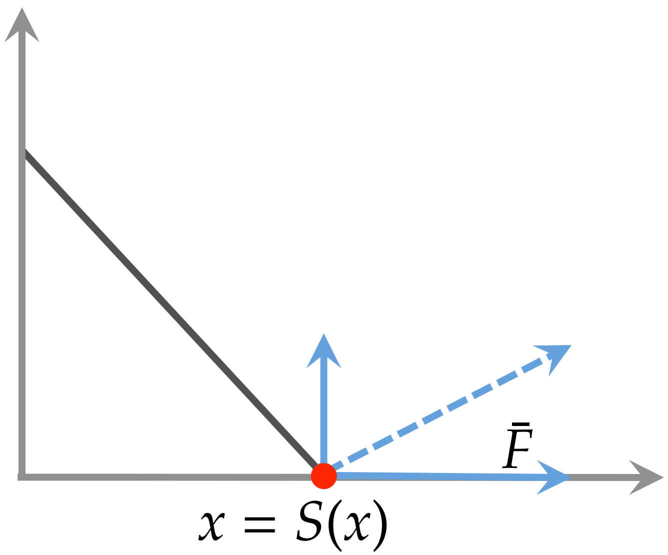
そのほかの動学ではどうなるか？

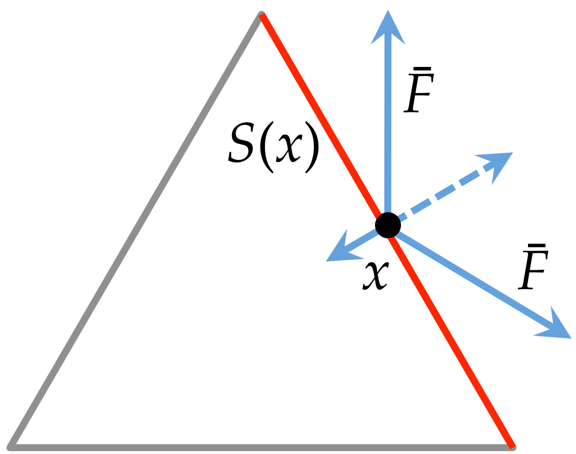
準備：準狭義均衡 (quasistrict equilibrium)

$\boxed{\textbf{定義}}$ 均衡 $\bar{x}$ が次の条件を満足するとき**準狭義均衡**と呼ぶ：

$$\bar{x}_i^p > 0, \bar{x}_j^p = 0 \Rightarrow F_i^p(\bar{x}) = \bar{F}^p(\bar{x}) > F_j^p(\bar{x})$$

- $S(\bar{x})$ を均衡 $\bar{x}$ において使用されている戦略の集合 (support) として，$F_i(\bar{x}) = \bar{F} \;\; \forall i \in S(x)$, $F_j(x) < \bar{F} \;\; \forall j \notin S(\bar{x})$
- F が X の "外を向く" ような均衡

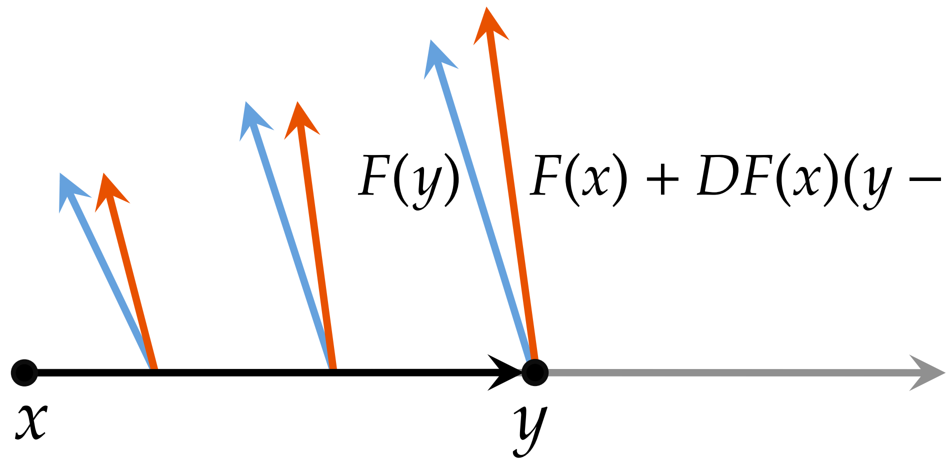




正則 (Taylor) ESS

定義 正則 (regular) ESS とは，次の条件を満足する準狭義均衡のこと：
$\forall y \in X \setminus \{x\}, \langle y - x, F(x) \rangle = 0 \Rightarrow (y - x)^\top \nabla F(x)(y - x) < 0.$

- ESS: $\langle y - x, F(y) \rangle < 0$：抑えられ方はどうでもいい
- 正則 ESS: $\langle y - x, F(x) + \nabla F(x)(y - x) \rangle < 0$：線形に抑えられる



正則 (Taylor) ESS

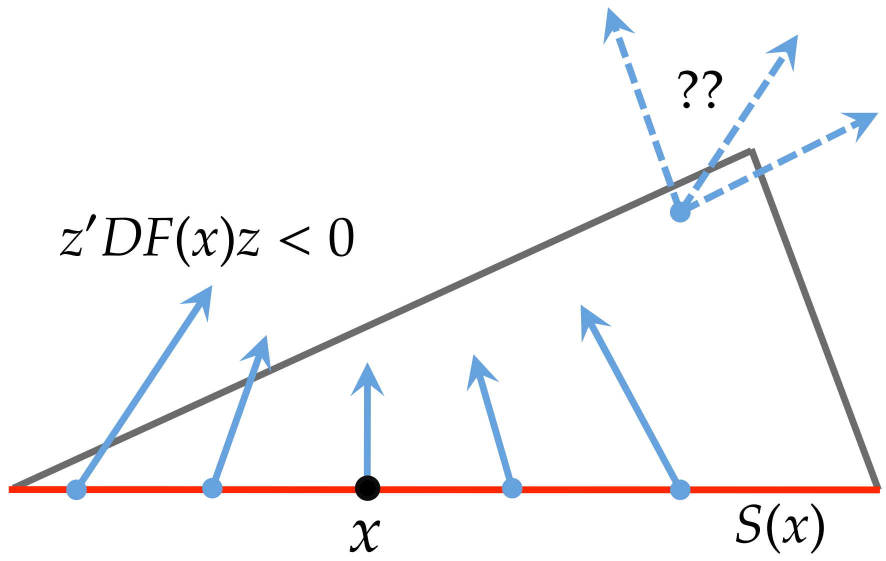
準狭義均衡 $x \in X$ が正則 ESS であることは次の条件を満たすことと等価：$z^\top \nabla F(x) z < 0 \quad \forall$nonzero $z \in TX \cap \mathbb{R}^n_{S(x)}$.

- $\mathbb{R}^n_{S(x)}$：$S(x)$ に対応する $\mathbb{R}^n$ の部分空間

均衡点付近における狭義単調性

$\Rightarrow$ 局所的に（$\mathbb{R}^n_{S(x)}$ 上で）安定ゲーム

$\mathbb{R}^n_{S(x)}$ の外については定値条件はない
（ただし準狭義均衡ではある）



正則ESSの局所安定性

正則ESS $\bar{x}$ は多くの進化ダイナミクスのもとで局所安定

- $\mathbb{R}^n_{S(x)}$ **上で局所的に**安定ゲームと見做せる

$\Rightarrow$ 安定ゲームでのLyapunov関数から“局所Lyapunov関数”を構築可能

定義 均衡 $\bar{x}$ に対する局所Lyapunov関数とは以下の条件を満足する関数：

- $\bar{x}$ の近傍で定義された正値関数
- $\bar{x}$ の近傍の任意の解軌道に沿って減少し，$\bar{x}$ において0

単純に定義域が均衡の近傍に限定されているのみ．

Lyapunov 関数の構築

1. X **上で**局所的に安定ゲームと**見做せる**場合

- すでに見た Lyapunov 関数を変更しないでよい
- 特に，内点の正則 ESS

2. X 上では局所的に安定ゲームと見做せない場合

- Lyapunov 関数に**変更が必要**
- 特に，境界上の正則 ESS（$\because$ 使われていない戦略についての利得は安定ゲームの条件を満足するとは限らない）

内点の正則ESSの局所安定性

内点の正則ESS$\bar{x}$ なら，近傍で局所的に安定ゲーム

$\Rightarrow$ 安定ゲームのLyapunov 関数をそのまま使える

$\boxed{\textbf{定理}}$ $\bar{x}$ が X の内点であり，かつ正則ESS ならば最適応答動学・BNN 動学・Smith 動学など色々な動学のもとで局所的に漸近安定．

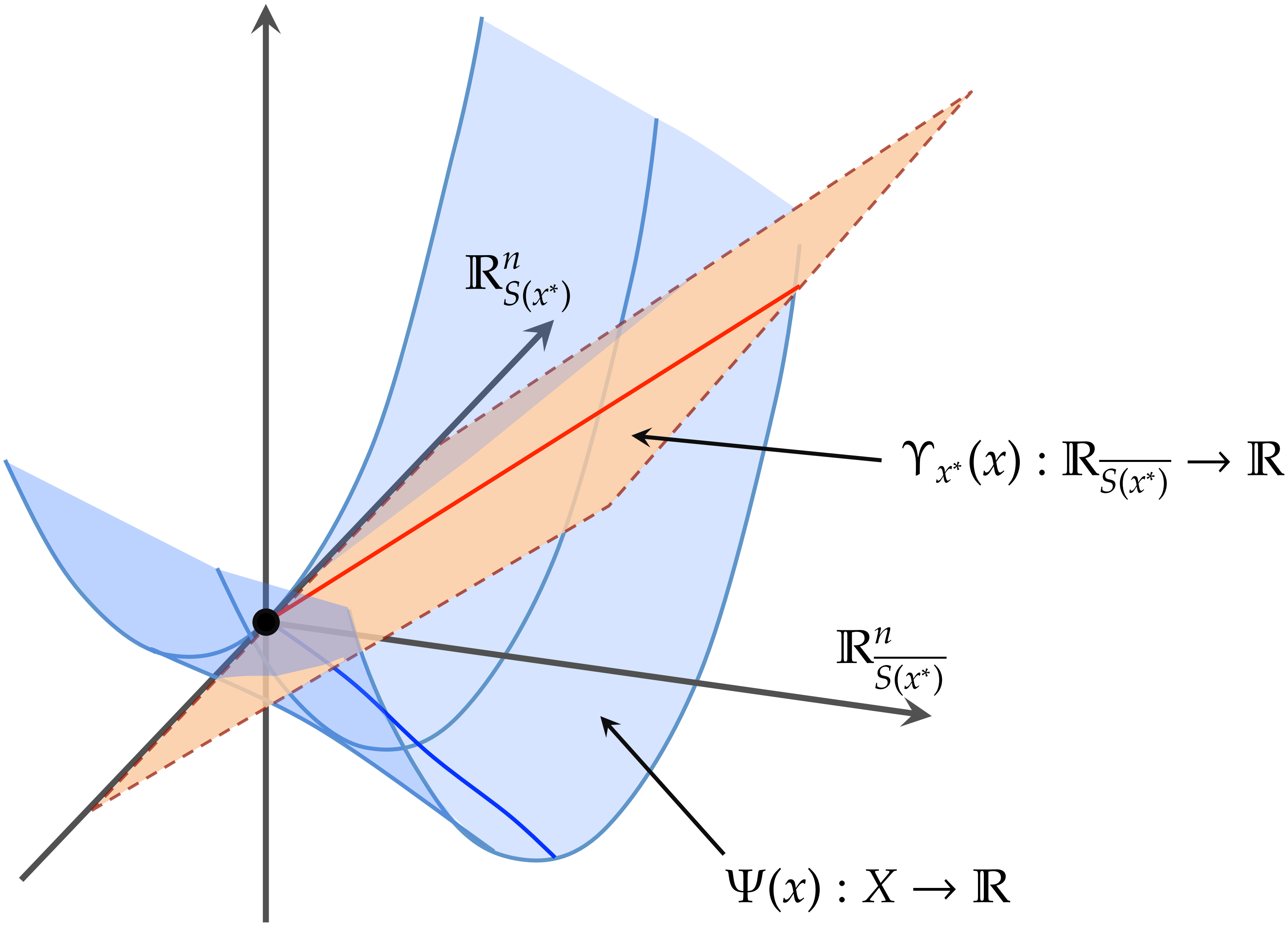
境界上の正則ESSの局所安定性

安定ゲームのLyapunov関数を Ψ とすると，少し修正する必要：

$$\Psi_{\bar{x}} = \Psi(x) + \Upsilon_{\bar{x}}(x) = \Psi(x) + C \cdot \Sigma_{j \notin S(\bar{x})} x_j \qquad C：定数$$

- $\mathbb{R}^n_{S(x)}$ 上では安定ゲーム $\Rightarrow \mathbb{R}^n_{S(x)}$ 上では Ψ は $\bar{x}$ に向かって常に減少
- しかし X 上，$j \notin S(\bar{x})$ まで含めると $\Psi(x)$ は減少するとは限らない．このとき第２項が $\bar{x}$ に向かって必ず減少することを保証．

ただし，C は均衡・ゲームに依存するため，これも均衡を数値的に求めるためには応用しづらいと考えられる．


$\mathbb{R}^n_{S(x^*)}$
$\Upsilon_{x^*}(x) : \mathbb{R}^n_{\overline{S(x^*)}} \to \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n_{\overline{S(x^*)}}$
$\Psi(x) : X \to \mathbb{R}$

進化ダイナミクスの線形近似

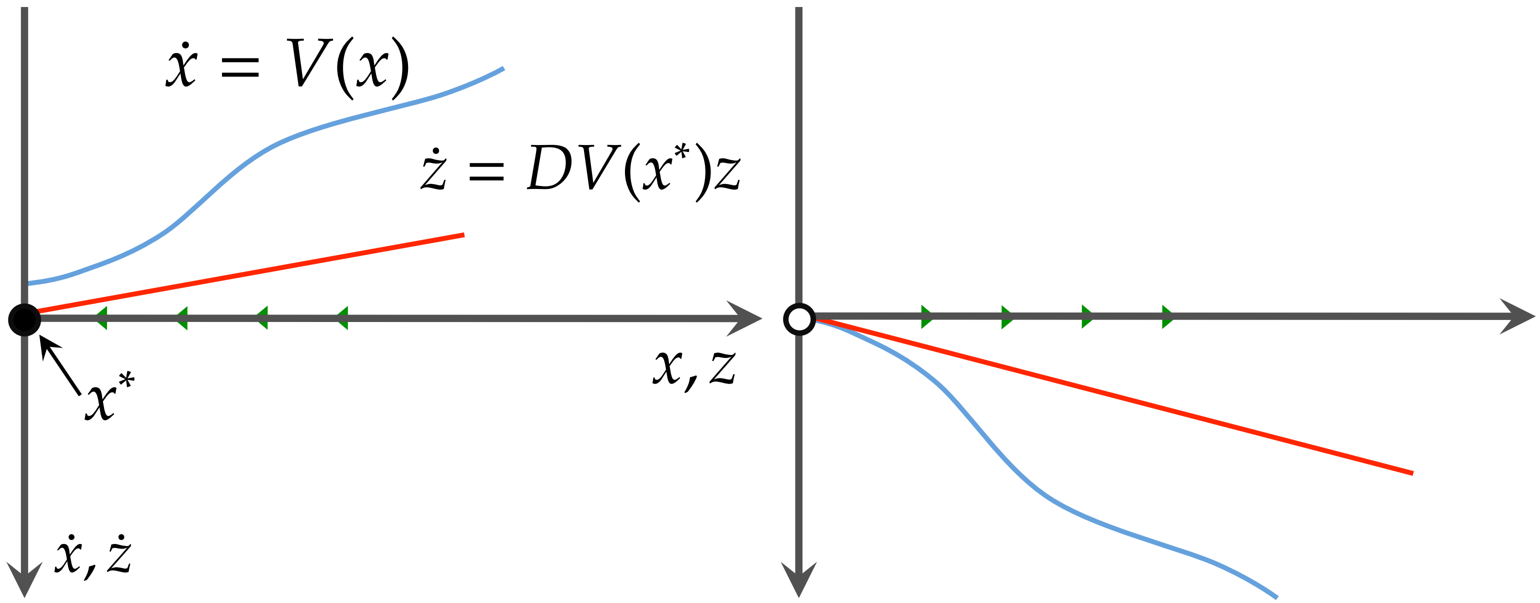
X 上の進化ダイナミクス：$\dot{x} = V(x)$

均衡点 $\bar{x}$ の近傍で線形近似したダイナミクス：

$$\dot{x} \sim V(\bar{x}) + \nabla V(\bar{x})(\bar{x} + z) \Rightarrow \dot{z} = \nabla V(\bar{x})z$$

もし $\nabla V(\bar{x})$ の全ての固有値の実部が負であれば，z は $\mathbf{0}$ に収束:

$\Rightarrow \bar{x}$ は V のもとで局所漸近安定（線形安定）



まとめ

もしある均衡 x^* が正則 ESS ならば様々なダイナミクスのもとで局所安定

均衡点周りで線形近似することで局所 (不) 安定性を判定可能

- ただし，具体的に ∇V を解析するのは難しい：
  単純ケースの理論分析，または数値解析

補足 進化ダイナミクスの非収束

大域的な非収束

均衡集合への大域的収束性が保証されるゲームおよび進化動学を見た

それ以外のゲームにおける進化ダイナミクスの長期的挙動は？

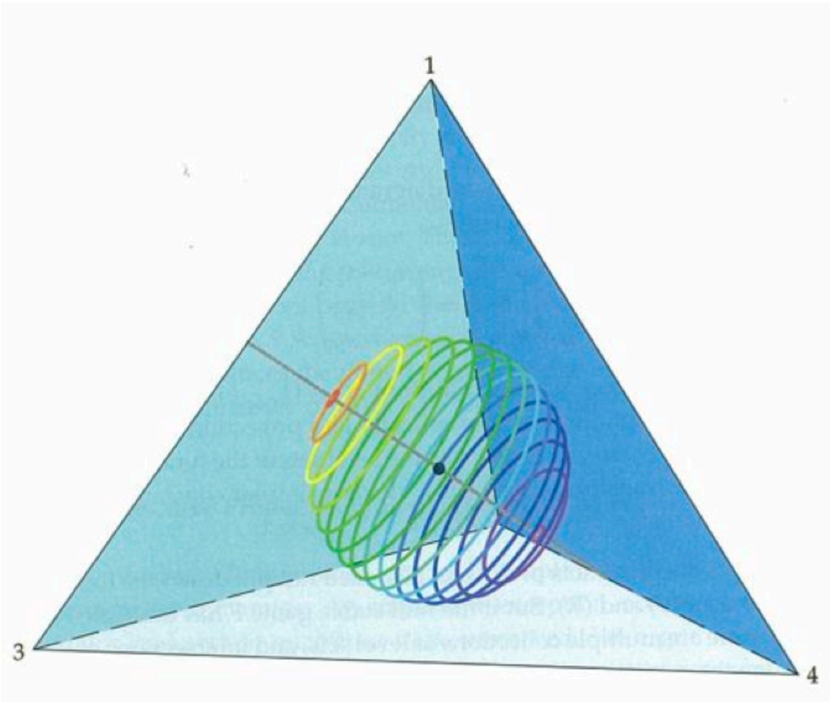
多くの場合，大域的な安定性は保証されない

- 決して収束しないような進化ダイナミクス
- 確定論的カオス

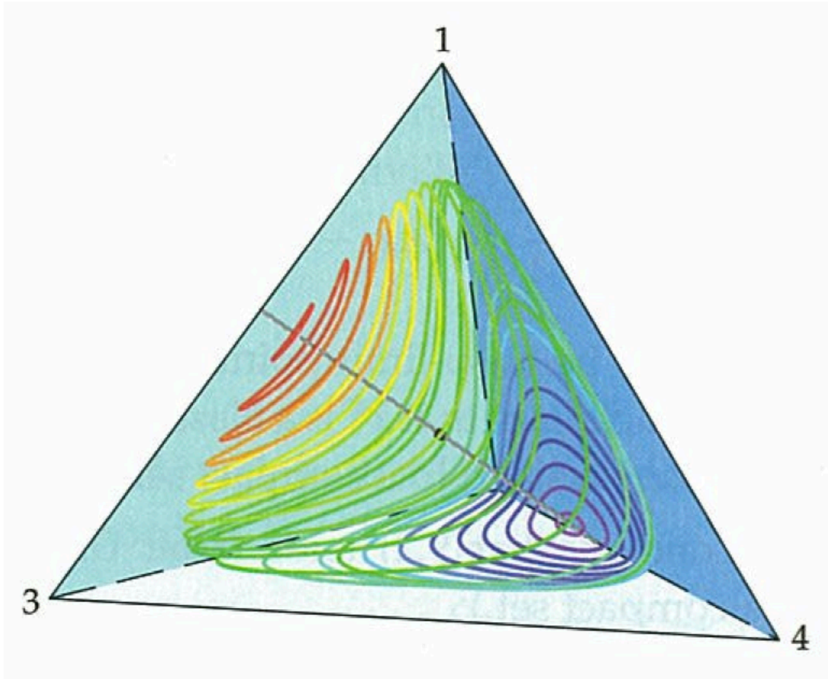
零安定ゲーム

$\boxed{\textbf{定義}}$ **零安定ゲーム**：$(y-x)'(F(y)-F(x))=0 \quad \forall x,y \in X$

零安定ゲームにおいてはLyapunov関数値が保存される（=収束しない）



射影動学：$E_x^*(x) = |x - x^*|^2$

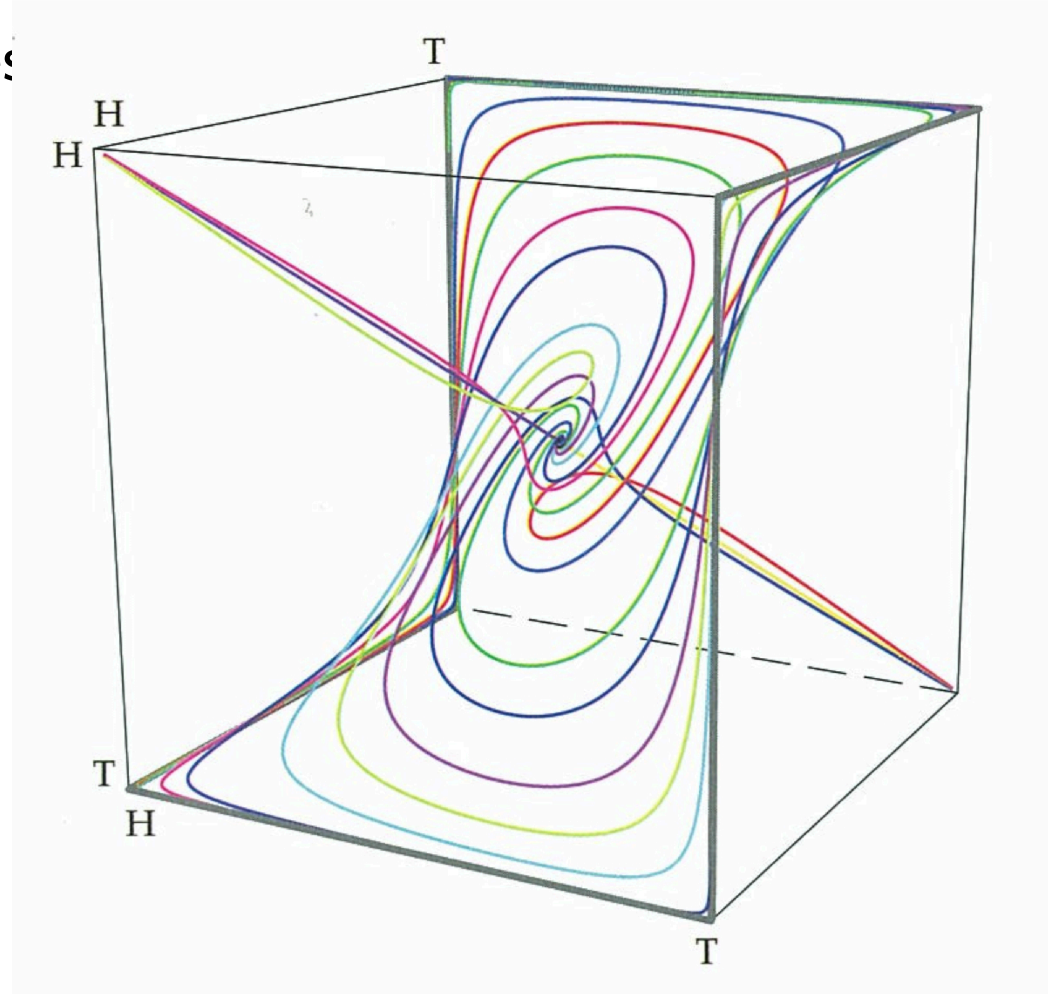


複製動学：$H_x^*(x) = \Sigma y_i^p \log(y_i^p / x_i^p)$

その他の大域的収束性のないゲーム

分野でよく使われるダイナミクスは収束しない

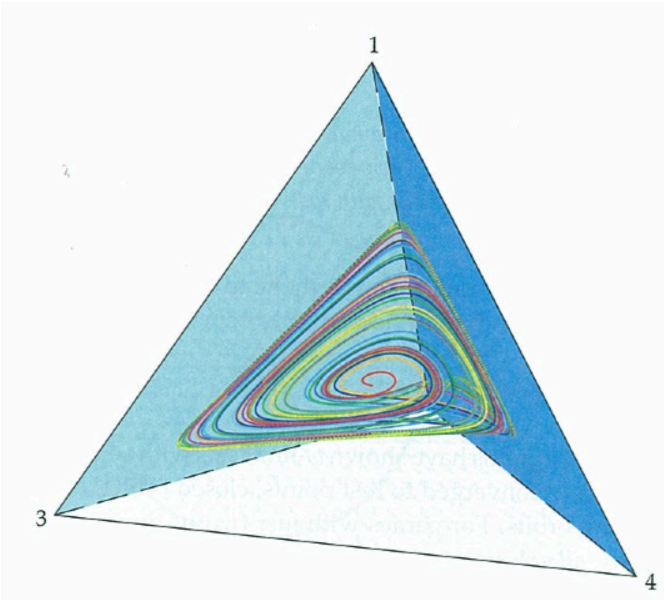
- Circulant Games
- Mismatching Pennies



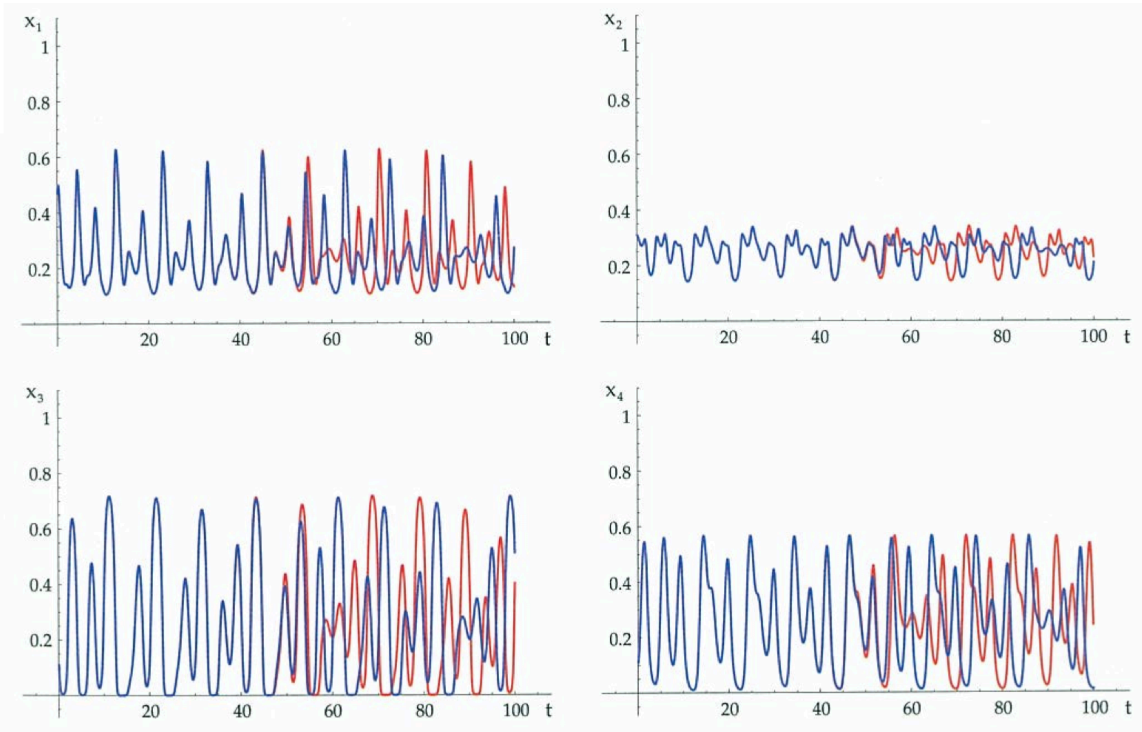
Replicator dynamic on Mismatching Pennies

より複雑な挙動（カオス）

確定論的ダイナミクスでありながら将来を “予想” できない

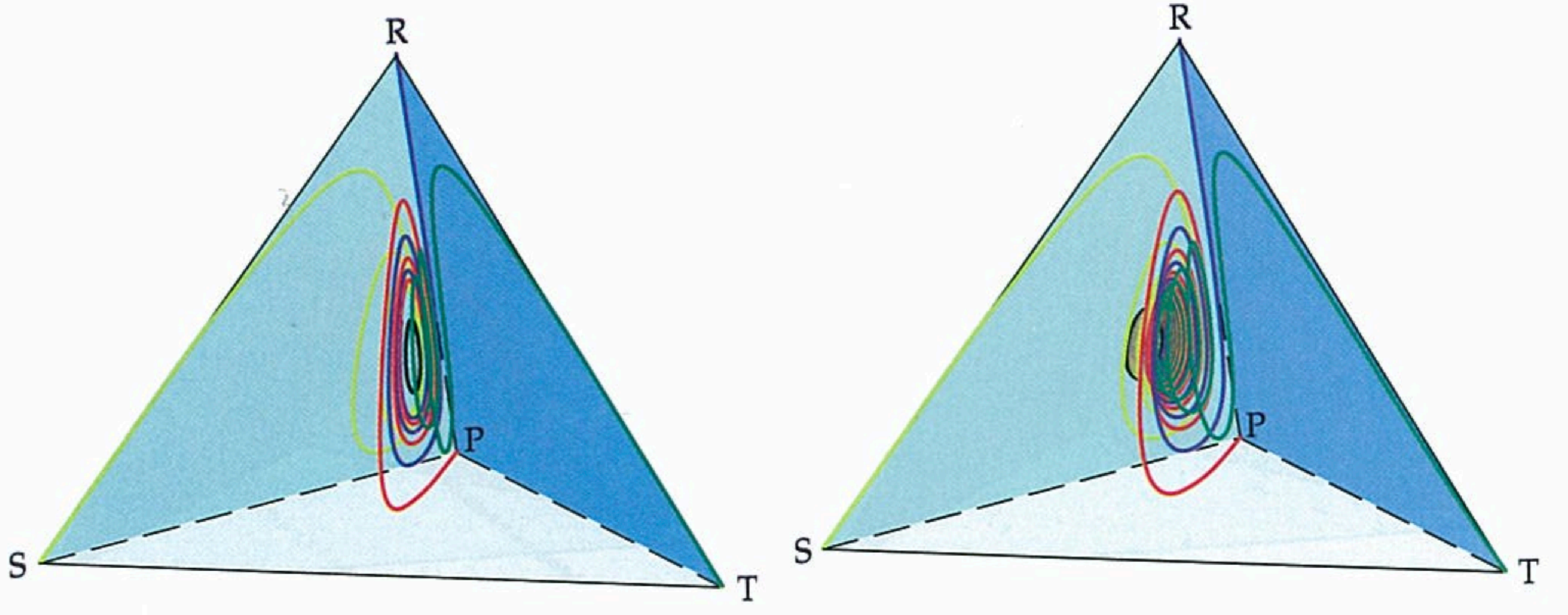


Strange attracter



初期値に対する鋭敏性

強支配される戦略の生存



(a) Bad RPS with a twin

(b) Bad RPS with a feeble twin

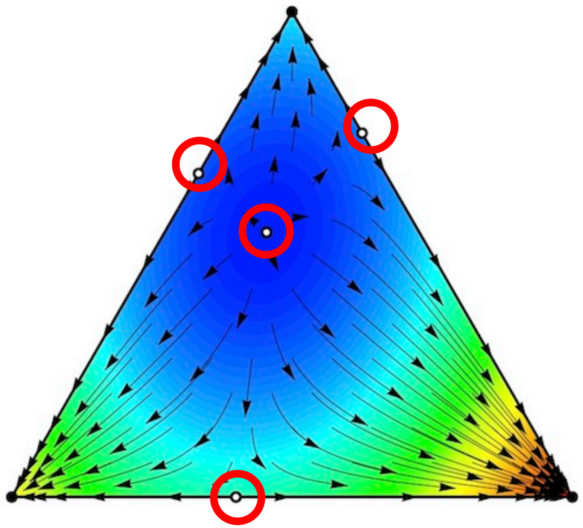
$$F(x) = Ax,\ A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2-d & 1-d & -d & -d \end{bmatrix}$$

確率論的進化ダイナミクス

局所的安定性の限界

複製動学の Nash 均衡でない停留点:

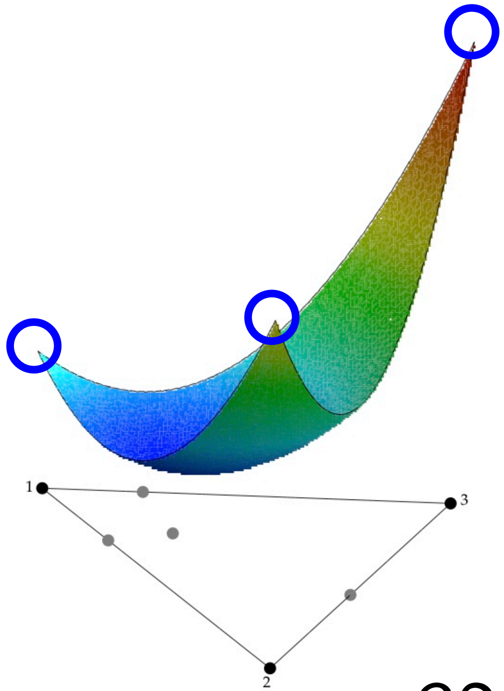
- 局所不安定
- 内点から始まったどの解軌道も到達しない



Example: Replicator dynamic

ポテンシャル・ゲームの安定な Nash 均衡点:

- ポテンシャル関数を局所最大化
- NS+PC を満足する動学のもとで漸近安定
- **複数の安定な均衡が存在**
- **どの均衡に収束するかは初期値依存**



確率論的進化ダイナミクス

確率論的進化ダイナミクス $=$ 連続時間 Markov 過程 $\{X_t\}$

- 単一の集団がゲーム $F : X \to \mathbb{R}^n$ をプレイ
- N エージェント，戦略 $i \in S$，$|S| = n$．$m^p = 1$ に規格化
- 状態空間は $\mathrm{X} = X \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^n = \{x \in X : Nx \in \mathbb{Z}^n, \}$

戦略改訂

- 改訂機会が到着率 R で各エージェントに Poisson 到着
- Revision protocol $\rho : \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}_+^{n\times n}$
- 改訂機会を受けて，i から j へ推移速度 $\rho_{ij}(F(x), x)/R$ で変更
- $R \geq \max_{x,i} \sum_{j\in S} \rho_{ij}(F(x), x)$
  (ρ_{ij}/R が確率測度となるための条件)

確率的進化ダイナミクス

状態 x から状態 y へ推移速度 P_{xy} で移行する**連続時間 Markov 過程**.

ジャンプ・レート：$\lambda_x^N = NR$

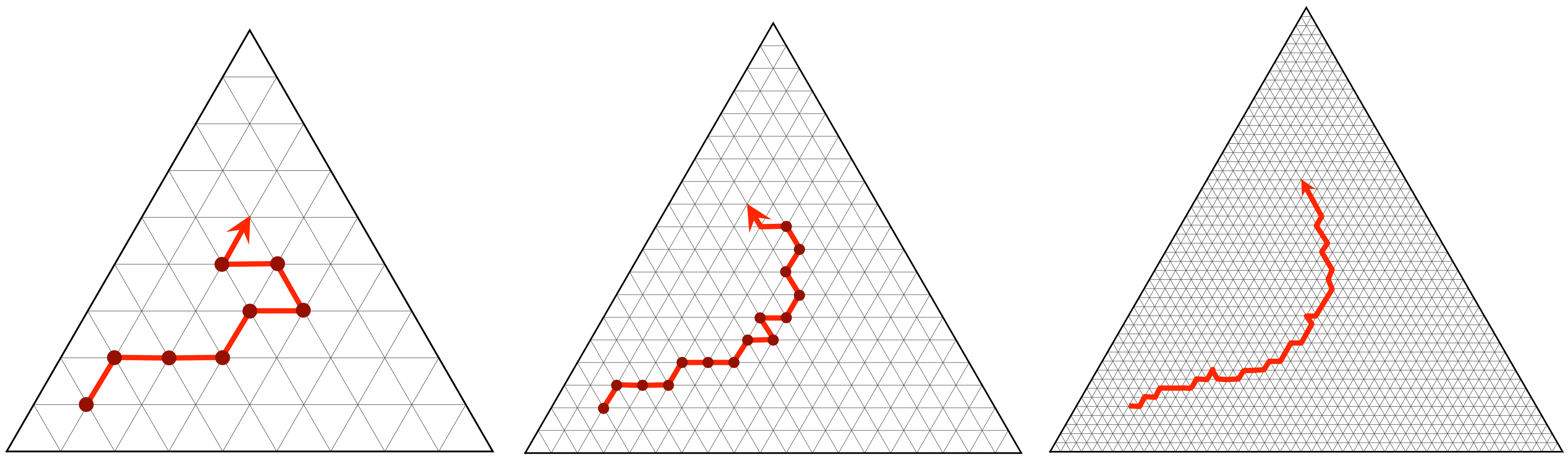
推移速度行列の要素：

$$P_{xy} = \begin{cases} \dfrac{x_i \rho_{ij}(F(x), x)}{R} & \text{if} \quad y = x + \frac{1}{N}(e_j - e_i) \\ 1 - \displaystyle\sum_{i \in S, j \neq i} \dfrac{x_i \rho_{ij}(F(x), x)}{R} & \text{if} \quad y = x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

有限時間内の確定論近似

有限時間内では，対応する決定論的進化動学の解軌道で近似可能

- **条件：有限時間** $[0, T]$ **内，十分大きな population size** N
- 初期状態がわかれば，$t \in [0, T]$ における状態を予測可能



これは決定論的動学の一つの正当化を与える．

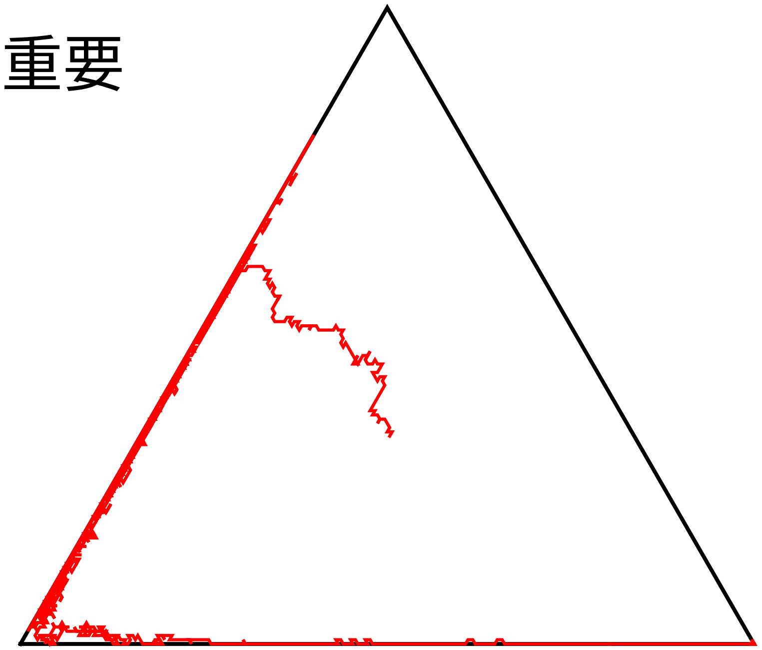
N を固定した**無限時間内**，$t \to \infty$ での挙動はどうなるだろうか？

無限時間の挙動の予測

隣接状態への推移率が常に非ゼロの場合，明らかに既約

$\Rightarrow \ t \to \infty$ で全ての状態に無限回到達

- “解軌道” が推定できても，結局役に立たない
- 確率過程のランダム性が本質的に重要

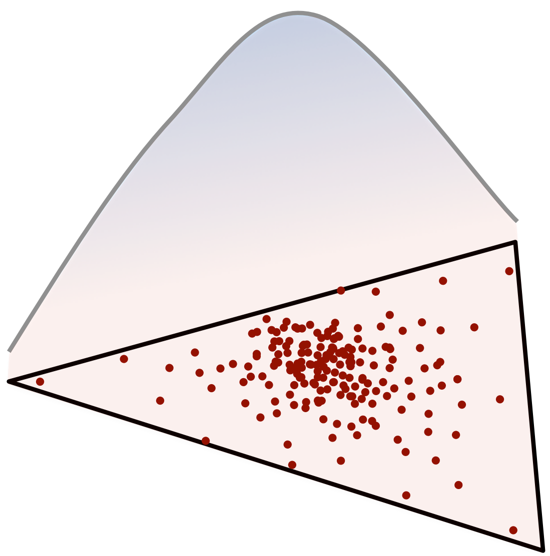


無限時間の挙動

何を使えばよいか？ $\Rightarrow$ Markov 過程 $\{X_t\}$ の定常分布 μ^N

既約・**正再帰的**なら $P\mu^N = \mu^N$ を満たす確率ベクトル μ^N が存在

初期状態はどうあれ，$t \to \infty$ における状態の分布を推定可能
（“長い時間が経過したあと平均的にどのあたりにいそうか” がわかる）



Full Support Revision Protocol

定義 ρ_{ij} が常に正であるとき，full support revision protocol と呼ぶ．

$$\rho_{ij}\left(F(x), x\right) > 0 \quad \forall i, j \in S, x \in X$$

- **いつでも全ての戦略が選択されうる**

  $\Rightarrow$ 状態 x から有限時間内に任意の状態 y に推移可能

  $=$ **既約・正再帰的** $\Rightarrow$ 定常分布 μ^N が一意に存在

例 Best Response with Mutations (BRM(ε)): 一様な撹乱

$$\rho_{ij}(\pi) = (1 - \varepsilon)\left[\arg\max_y \langle y, \pi\rangle\right]_j + \varepsilon\frac{1}{n}$$

例 Logit Choice: ランダム効用理論に基づく ρ_{ij} は常に非ゼロ

既約なMarkov過程の定常分布μの性質

定義 定常分布 μ：$\mu = P\mu$ なる確率ベクトル.

- 定常分布 μ から出発すると不変:

$$\mathbb{P}_{\mu}\left(X_t = x\right) = \mu_x \qquad \forall x \in \mathrm{X}, t \geq 0.$$

- 任意の状態の分布 π から出発しても μ に収束:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_{\pi}\left(X_t = x\right) = \mu_x \qquad \forall x \in \mathrm{X}.$$

- 一定時間内に状態 x に留まる時間の割合も μ に収束:

$$\mathbb{P}_{\pi}\left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T 1_{\{X_t=x\}}\mathrm{d}t = \mu_x\right) = 1$$

$\Rightarrow\mu$ によって無限時間が経過したときの状態を予想できる

定常分布の計算

定常分布 $=$ Pの固有値１の固有ベクトル.

$\Rightarrow$ 原理的には，P の固有値解析で計算可（現実的ではない）

可逆性 が成り立てば解析は簡単

$\boxed{\textbf{定義}}$ **可逆性**： $\mu_x P_{xy} = \mu_y P_{yx} \qquad \forall x, y \in \mathrm{X}$

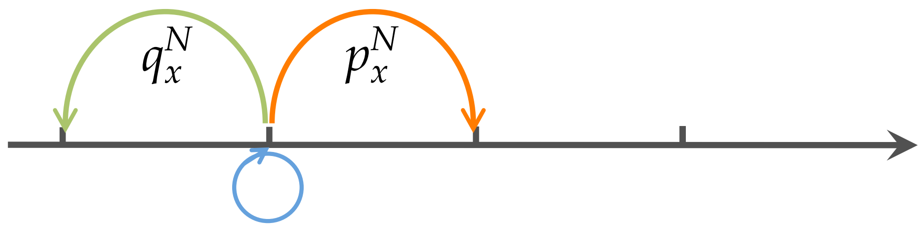
可逆性の成立が知られている２つのクラス:

- ２戦略ゲーム（=出生死滅過程）
- ρ が指数型である場合のポテンシャル・ゲーム

$\boxed{\text{例}}$ 2戦略ゲームと出生死滅過程

- N エージェント，戦略 $i \in S = \{0, 1\}$．$m^p = 1$.
- 状態空間は1次元グリッド:$\left\{\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, 1\right\}$．以降 $\mathrm{x} \equiv x_1$ で表現
- 出生死滅過程に帰結：

$$P_{\mathrm{xy}} \equiv \begin{cases} p_{\mathrm{x}}^N & \text{if } \mathrm{y} = \mathrm{x} + \frac{1}{N} \\ q_{\mathrm{x}}^N & \text{if } \mathrm{y} = \mathrm{x} - \frac{1}{N} \\ 1 - p_{\mathrm{x}}^N - q_{\mathrm{x}}^N & \text{if } \mathrm{y} = \mathrm{x} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



$\boxed{\text{例}}$ 出生死滅過程の定常分布

- 出生死滅過程はreversible

$$\mu_{\mathrm{x}}^{N} q_{\mathrm{x}}^{N} = \mu_{\mathrm{x}-1/N}^{N} p_{\mathrm{x}-1/N}^{N} \qquad \forall \mathrm{x} \in \left\{ \frac{1}{N}, \cdots, 1 \right\}.$$

- 定常分布は次のように求められる：

$$\mu_{\mathrm{x}}^{N} = \prod_{j=1}^{N\mathrm{x}} \frac{p_{\frac{j-1}{N}}^{N}}{q_{\frac{j}{N}}^{N}} \mu_{0}^{N}, \quad \mu_0 = \left(\sum_{i=0}^{N} \prod_{j=1}^{i} \frac{p_{\frac{j-1}{N}}^{N}}{q_{\frac{j}{N}}^{N}} \right)$$

- 明示的に確率論的進化過程を考えると

$$p_{\mathrm{x}}^{N} = (1-\mathrm{x}) \frac{\rho_{01}(F(\mathrm{x}), \mathrm{x})}{R},$$

$$q_{\mathrm{x}}^{N} = \mathrm{x} \frac{\rho_{10}(F(\mathrm{x}), \mathrm{x})}{R}$$

例 2戦略の確率論的進化過程の定常分布

定理 N エージェントが 2 戦略ゲーム F を **full support revision protocol** ρ に基づいてプレイする．このとき X^N 上の確率論的進化過程 $\{X_t^N\}$ は次の定常分布を持つ:

$$\frac{\mu_{\mathrm{x}}^N}{\mu_0^N} = \prod_{j=1}^{N\mathrm{x}} \frac{N-j+1}{j} \cdot \frac{\rho_{01}\left(F(\frac{j-1}{N}), \frac{j-1}{N}\right)}{\rho_{10}\left(F(\frac{j}{N}), \frac{j}{N}\right)}$$

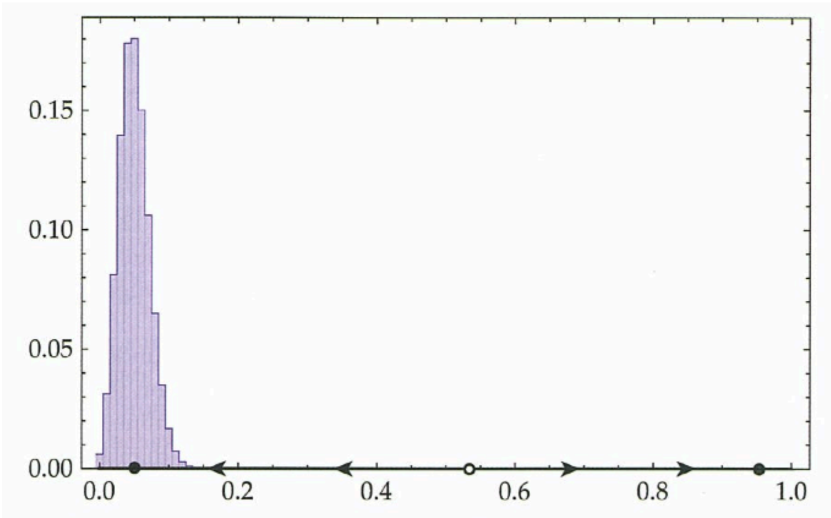
ここで，μ_0^N は条件 $\sum_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}^N} \mu_{\mathrm{x}}^N = 1$ から導かれる．

ポテンシャル・ゲームと指数型 ρ の議論は後述する．

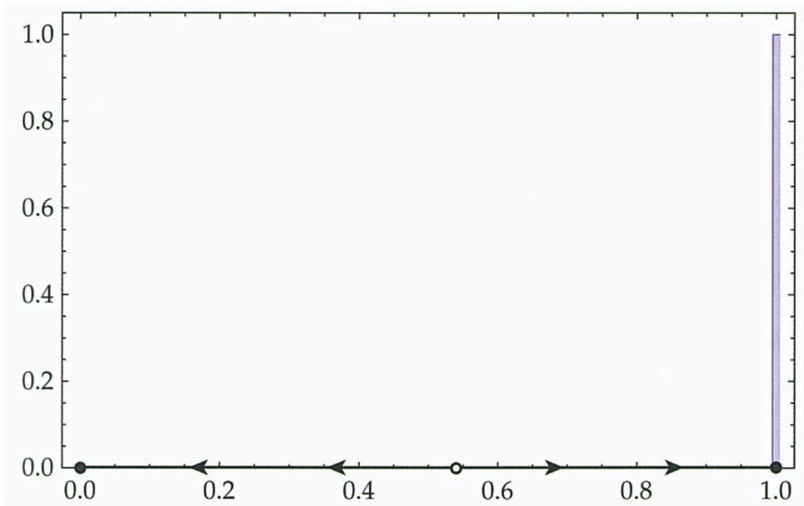
動学 (ρ) への依存性

仮定するダイナミクスによって定常分布は異なる．
さらに，ゲームによっては，μ によって "選択される" Nash 均衡も異なる．

$\boxed{\text{例}}$ 2戦略 Nonlinear stug hunt に対する ϵ-最適応答・logit の定常分布



(a) Best response with mutations (ε = .10)

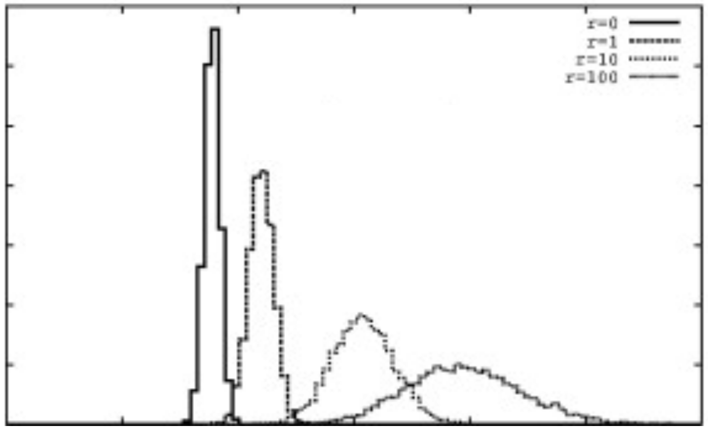


(b) Logit (η = .25)

$N, t \to \infty$ や, $\eta \to 0$ のとき定常分布はどうなる？

確率安定性

定義 N または η の極限において状態 $x \in X$ が**確率安定**であるとは，μ_x^N が x の近傍へ集中すること．



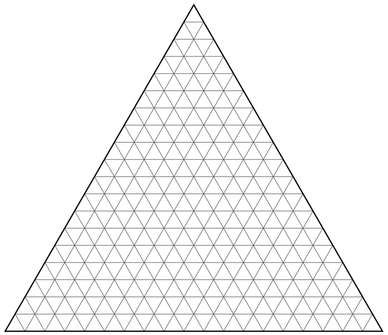
小ノイズ極限 (small noise limit)：η の極限
大集団極限 (large population limit)：N の極限
小ノイズ・大集団極限 (double limits)：N, η の極限

↑勝手な和訳なので他では使わないでください

小ノイズ極限

定義 $x \in X^N$ は $\lim_{\eta \to 0} \mu_x^{N,\eta} > 0$ なら**小ノイズ極限の確率安定状態**.

- N は固定：$\mu^{N,\eta}$ は X^N 上の確率分布
- もし $\{\mu^{N,\eta}\}_{\eta \in (0,\bar{\eta}]}$ が 1 点に収束するならその点は大域的に確率安定



X^N $(N = 20)$

小ノイズ極限では，選択のエラーの減少が均衡選択のメカニズムとなる．

小ノイズ極限：弱い特徴づけ

$\boxed{\textbf{定義}}$ $x \in X^N$ は以下の条件を満足するとき，小ノイズ極限で**弱い確率安定状態** (weakly stochatically stable) であるとする：

$$\lim_{\eta \to 0} \eta \log \mu_x^{N,\eta} = 0$$

- $\eta \to 0$ のとき $\mu_x^{N,\eta}$ が指数的には減少しないことを意味する．
- $r_x^N : X \mapsto \mathbb{R}_-$ によって $\lim_{\eta \to 0} \eta \log \mu_x^{N,\eta} = r_x^N$ なら
$$\mu_x^{N,\eta} = \exp\left(\eta^{-1}\left(r_x^N + o(1)\right)\right)$$
であるから r_x^N は μ_x^N の指数的減少率になっている．
- もし全ての $x \in X^N$ に対して r_x^N が存在し，x^* が唯一の弱い確率安定状態であるならば，x^* は確率安定

例 指数型の ρ のもとでのポテンシャルゲーム

指数型 ρ の例：Logit （一番シンプルな例）

$$\rho_{ij}^{\eta}(\pi) = c(\pi)\exp(\eta^{-1}\pi_j)$$

有限集団ゲームに対するポテンシャル関数：
利得関数を $F^N : X^N \mapsto \mathbb{R}^n$ とするとき次を満足する $f^N : X^N \mapsto \mathbb{R}$

$$F_j^N(x + z_{ij}) - F_i^N(x) = f^N(x + z_{ij}) - f^N(x)$$

ただし $z_{ij} = \frac{1}{N}(e_j - e_i)$ は i から j への戦略変更による状態変化

Logit 選択のもとでの定常分布

$\boxed{\textbf{定理}}$ Logit 選択のもとでの定常分布は K^N を定数として

$$\mu_x^{N,\eta} = \frac{1}{K^N} \frac{N!}{\prod_{k \in S} (Nx_k)!} \exp\left(\eta^{-1} f^N(x)\right).$$

$$\therefore \quad \frac{\mu_x^{N,\eta}}{\mu_y^{N,\eta}} = \frac{\prod_k (Ny_k)!}{\prod_k (Nx_k)!} \exp\left(\eta^{-1}(f^N(x) - f^N(y))\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{\eta \to 0} \eta \log \frac{\mu_x^{N,\eta}}{\mu_y^{N,\eta}} &= \lim_{\eta \to 0} \left((f^N(x) - f^N(y)) + \eta \log C\right) \\ &= f^N(x) - f^N(y)\end{aligned}$$

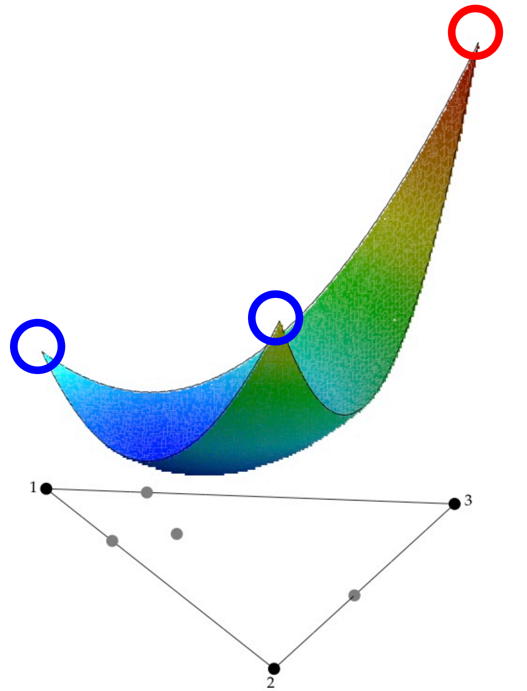
Logit 選択のもとでのPGの確率安定状態

$\boxed{\textbf{定理}}$ 有限集団ポテンシャル・ゲーム F^N に対して，Logit 選択のもとでの確率安定状態はポテンシャル関数 f^N の**大域的最大化点**の集合.

※ 色々技術的な条件は必要（割愛）

- 実際，$\Delta f^N(x) = f^N(x) - \max_y f^N(y)$ として

$$\lim_{\eta \to 0} \eta \log \mu_x^{N,\eta} = \Delta f^N(x) \qquad \forall x \in X^N$$



$\boxed{\text{例}}$ Harris–Wilson（HW）モデル

集積力を導入した都市内モデル

$$F_i(x) = x_i^{\alpha-1} \sum_j \frac{\phi_{ji}}{\sum_k \phi_{kj} x_k^{\alpha}} D_j - \kappa_i$$

ポテンシャル関数：

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_j D_j \log \sum_k \phi_{kj} x_k^{\alpha} - \sum_i \kappa_i x_i$$

例 HW モデルの局所安定解と確率安定解

二次元正方格子における集積パターン．灰色は多くのダイナミクスのもとで局所安定となる解．黒で示した解は確率安定解となる．