

2025 後期 均衡分析と数理最適化

都市モデル

経済研究所 大澤 実

osawa.minoru.4z@kyoto-u.ac.jp

目的

都市経済学モデルを変分不等式・相補性問題、および集団ゲーム理論の観点から議論する。

- 都市モデルは付け値地代 (bid rent) 関数を考えるのが標準的だが、付け値地代アプローチは双対型の相補性問題と対応付けられる。
- 土地消費は人口集積に対する分散力として働き、また離散選択モデルとも対応付けられる。逆に言えば、離散選択モデルは分散力として捉えることができる。
- 集積の経済を追加したモデルもシンプルなケースでは積分可能な問題（ポテンシャル・ゲーム）になる。

都市経済学の基本モデル： Alonso–Muth–Mills モデル

通勤費用と地代とのトレードオフで都市内の居住パターンを表現

混雑のみのモデル ⇒ 問題の構造として凸性を持つ

状況設定：

- 1 単位の連続的な労働者が存在する離散空間を考える
- 居住地 $i = 1, 2, \dots, n$, 土地供給量 A_i , 通勤費用 c_i
- $i = 0$ に CBD (central business district) が存在し, 全員そこへ通勤
- 簡単のため, 効用は z を合成財消費量・ a を土地消費量として準線形

$$u(z, a) = z + f(a) \quad f' > 0, f'' < 0, \lim_{a \rightarrow 0} f(a) = -\infty$$

予算制約 $z + ra \leq y - c_i$ (y は十分大きい)

Quiz 消費者の効用最大化問題を解き間接効用関数を求めよ.

間接効用

$z = y - c_i - ra$ になることを使って解いてしまおう.

$$u(a) \equiv y - c_i - ra + f(a) \Rightarrow u'(a) = -r + f'(a)$$

$f'' < 0$ なので最適性の必要十分条件は $u' = 0$. 特に, $r > 0$.

居住地 i の土地市場の均衡条件は, 居住人数を x_i , 土地消費を a_i として

$$\begin{cases} x_i a_i = A_i & (r_i > 0) \\ x_i a_i \leq A_i & (r_i = 0) \end{cases} \Rightarrow a_i = A_i / x_i \quad (\because r_i > 0)$$

また, 最適性条件より $r_i = f'(A_i / x_i)$

間接効用

従って、消費者の居住地人口 x_i を変数とする間接効用は

$$v_i(x_i) = y - c_i + g(A_i/x_i) \quad g(a) \equiv f(a) - af'(a)$$

明らかに v は分離可能. 従って、次の最適化問題が立地均衡と等価：

$$\text{minimize} \quad - \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} v_i(\omega) d\omega$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n x_i = L, \quad x_i \geq 0$$

Quiz この均衡問題の解が存在すれば一意であることを確認せよ.

解 目的関数の Hesse 行列は $-\text{diag}[v'_i(x_i)]$ である. ところで

$$v'_i(x_i) = -\frac{A_i}{x_i^2} g'(A_i/x_i)$$

$$g'(\cdot) = f'(\cdot) - af''(\cdot) > 0$$

であるから $v'_i(x_i) < 0$ であり, 目的関数は凸関数.

(= 同じ地点に居住する人が多ければ多いほど間接効用が減少する)

等価最適化問題は凸計画問題 \Rightarrow 従って解は存在すれば一意である.

Quiz 混雑ゲームと全く同じ構造であることを確認し, 双対問題を示せ.

例 $f(a) = \alpha \log a$. $f'(a) = \alpha/a$ より $g(a) = \alpha \log a - \alpha$. よって

$$v_i(x_i) = y - \alpha - c_i - \alpha \log \frac{x_i}{A_i}.$$

よって等価最適化問題の目的関数は（定数を除くと）

$$-\sum_i (y - \alpha - c_i + \alpha \log A_i) - \alpha \sum_i x_i \log x_i$$

解は $x_i = 0$ が不適より全 i について $v_i(x_i) = \bar{v}$ だから

$$x_i = A_i \exp(\alpha^{-1}(y - c_i - \alpha - \bar{v}))$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{A_i \exp(-\alpha^{-1}c_i)}{\sum_k A_k \exp(-\alpha^{-1}c_k)} L$$

拡張：交通混雑

居住地が線上に順々に並んでいると考え，居住地 i から $i-1$ への交通費用を t_i とする. このとき $c_i = t_i + t_{i-1} + \cdots + t_1$ になる.

交通ネットワークのモデルと同様， t_i が交通量に依存する増加関数だとしよう. すなわち

$$t_i = t_i(x) = t_i(x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n)$$

Quiz このモデルに対する等価最適化問題が存在するか確認し，存在するならば与えよ. また，解の特徴を述べよ.

混雑ゲームでは、リンクの利用量に応じて増加関数として交通混雑を考えるが、道路のボトルネック (e.g., 橋、高需要の交差点) は明示的に考えていない ⇒ ラッシュアワーの渋滞は原理的に考えられない。

ボトルネック・モデルは動的な渋滞を考えるモデル (Vickrey, 1969)

居住地選択を固定し、通勤者がいつ自宅を出発するかを考える。

- 居住地と CBD の間には単位時間キャパシティ μ のボトルネック
それ以上の交通フローが流入すると待ち行列が発生
- 通勤者には希望到着時刻 t^* が存在 (始業時刻など)
そこからずれるほどペナルティが発生

⇒ 待ち行列遅れと到着時刻のずれとのトレードオフで出発時刻を選択

都心の形成：Beckmann モデル

概要

AMM モデルの立地パターンの非対称性 = CBD に全員が通勤する仮定

Beckmann モデル：CBD を明示的に仮定せず，その形成を表現

企業の利得関数：

$$v_i(x) = \sum_j \phi_{ij} x_j - c_i(x_i).$$

- $\phi_{ij} \in (0, 1)$ を j から i への**正の外部性**の強さ
- $c_i(\cdot)$ は地点 i の**混雑外部性**. $c'_i(\cdot) > 0$.
オリジナル論文では $c_i(x_i) = \alpha \log x_i$ を仮定
- “microfoundation” を与えることも可能

等価最適化問題

AMM モデルと異なり, Beckmann モデルの v は分離可能ではない.

しかし, 外部性が対称ならば等価最適化問題が存在. $D = [\phi_{ij}]$ として

$$\nabla v(x) = D - \text{diag}[c'(x_i)]$$

$\Rightarrow D$ が対称 ($\phi_{ij} = \phi_{ji}$) ならば $\nabla v(x)$ は対称.

具体的には, 対応する最適化問題は

$$\text{maximize} \quad \frac{1}{2} x^\top D x - \sum_i \int_0^{x_i} c(\omega) d\omega$$

$$\text{subject to} \quad \sum_i x_i = L, \quad x_i \geq 0$$

例 $c(x) = \alpha \log x$ ならば最適化問題は

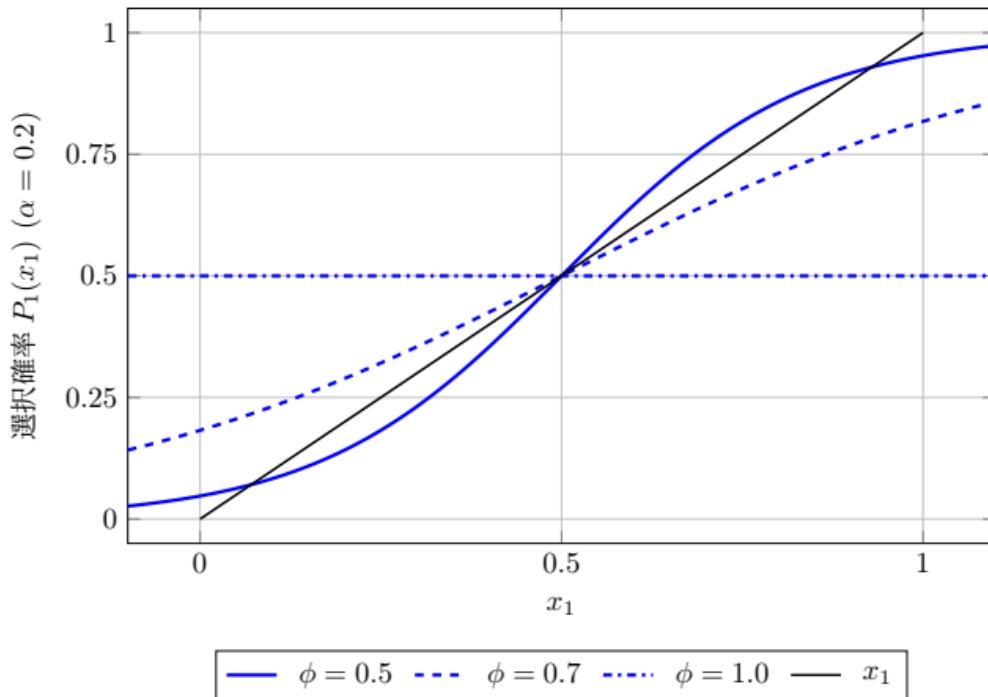
$$\text{maximize} \quad \frac{1}{2} x^\top D x - \alpha \sum_i x_i \log x_i$$

$$\text{subject to} \quad \sum_i x_i = L, \quad x_i \geq 0$$

であり，その解は $E_i(x) \equiv \sum_j \phi_{ij} x_j$ として次の**不動点問題**の解：

$$x_i = P_i(x)L \quad P_i(x) = \frac{\exp(\alpha^{-1} E_i(x))}{\sum_k \exp(\alpha^{-1} E_k(x))}$$

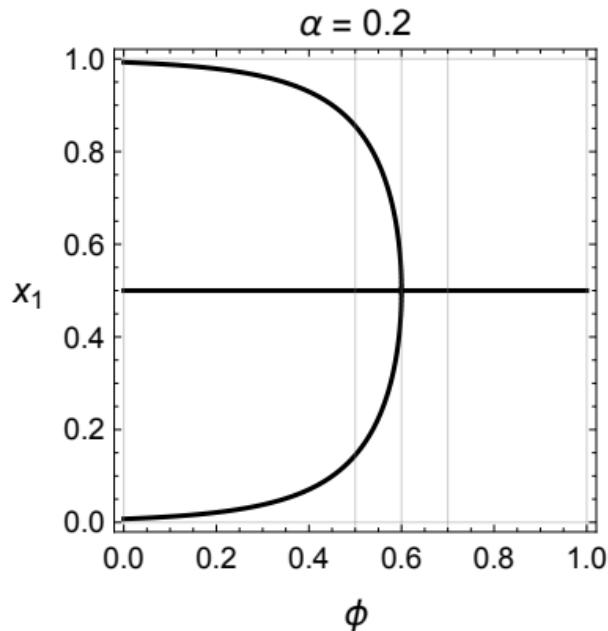
Quiz 2 地点モデルを考える. $L = 1, \phi_{ii} = 1, \phi_{ij} = \phi_{ji} = \phi$ とするとき，異なる α のレベルに対応する不動点の挙動を考察してみよ（横軸に x_1 をとり，関数 x_1 および $P_1(x)$ のグラフを描いて考えればよい）



Quiz 解が 3 つ存在する条件を求めよ.

対称 2 地点ケースの解曲線

$P'_1(x_1) = 1$ より $\phi^* = 0.6$ と求められる：



均衡の一意性

利得関数の Jacobi 行列 ポテンシャルの Hesse 行列 $\times -1$) :

$$\nabla v = D - \text{diag}[c'(x_i)]$$

が実行可能領域上で常に負定値であれば解は一意.

Quiz $c(x) = \alpha x$ ならば, 対応する最適化問題は $A = D - \alpha I$ として

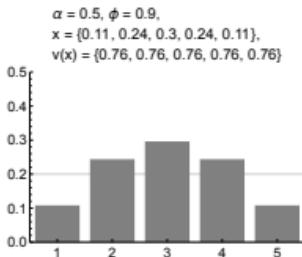
$$\text{maximize} \quad \frac{1}{2}x^\top D x - \frac{\alpha}{2} \sum_i x_i^2 = \frac{1}{2}x^\top A x$$

A が条件付き負定値ならばこの問題は凸計画問題であり, 解は一意.

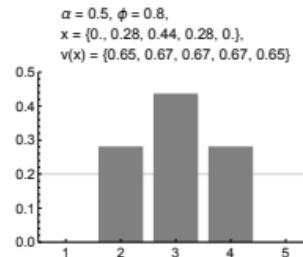
Quiz 内点解なら $x = \bar{v} A^{-1} \mathbf{1}$ (\bar{v} : 定数) となることを確認せよ.

線分 5 地点の集積形成 ($\phi_{ij} = \phi^{\ell_{ij}}$, $c(x_i) = \alpha x_i$)

$$[\ell_{ij}] = \text{Toeplitz}(0, 1, 2, 3, 4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



内点解



端点解 (不安定)

居住地区と業務地区の形成： Ogawa-Fujita モデル

モデル

企業と労働者の相互作用による都市構造形成

企業分布 $m = (m_i)$, 労働者の居住・通勤パターン $n = (n_{ij})$

\Rightarrow 人口分布 $N = (N_i)$, $N_i = \sum_j n_{ij}$

土地市場・労働市場の均衡 \rightarrow 地代 r_i ・賃金 w_i

企業の利得関数: $\pi_i = \underbrace{F_i(m)}_{\text{売上: 集積の経済を仮定}} - w_i \underbrace{L}_{\text{労働需要}} - r_i \underbrace{s^f}_{\text{土地需要}}$

仮定: $\nabla F(\cdot)$ は全ての m に対して正定値 \dots **集積の経済**

例: $F_i(m) = \bar{F}_i m_i^\alpha$ ($\alpha > 0$)

$F_i(m) = \bar{F}_i \sum_j \phi_{ij} m_j$ ($[\phi_{ij}]$: 正定値)

モデル

$$\text{労働者の効用: } v_{ij} = w_j - \underbrace{td_{ij}}_{\text{通勤費用}} - r_i \underbrace{s^w}_{\text{土地需要}}$$

前提: d_{ij} : ij 間の物理的距離, t, L, s^f, s^w は定数, 土地供給 a_i

均衡状態: 企業の利潤最大化行動 (立地選択)・労働者の効用最大化行動 (居住地・勤務先選択)・市場均衡 (賃金・地代) と整合的な (M, n, w, r)

- 企業間の**集積の経済**が存在
⇒ 業務地区が内生的に形成される (cf. Beckmann モデル)
- 企業・労働者が土地市場で競合, 最も高い地代を支払う主体が利用
⇒ 業務地区・居住地区の別が均衡で決まる

均衡条件を表す NCP

$$0 \leq n_{ij} \perp \bar{v} - (w_j - td_{ij} - r_i s^w) \geq 0$$

$$0 \leq m_j \perp \pi_j = F_j(m) - w_j L - r_j s^f \leq 0$$

$$0 \leq r_i \perp a_i - s^w \sum_j n_{ij} + s^f m_i \geq 0$$

$$0 \leq w_j \perp \sum_i n_{ij} - L m_j \geq 0$$

$$0 \leq \bar{v} \perp N - \sum_{ij} n_{ij} \geq 0$$

Ogawa-Fujita は $F_i(m) = \bar{F} - \tau \sum_j d_{ij} m_j$ と特定化 \Rightarrow LCP に帰着

Quiz $d_{ij} = d_{ji}$ とする. 市場均衡条件の実行可能性役を満足する (m, n) に実行可能領域を制限することで, LCP を最適化問題に帰着せよ.

均衡の特徴づけ

$d_{ij} = d_{ji}$ のとき, Ogawa-Fujita モデルは以下の最適化問題に帰着:

$$\begin{aligned} \max_{(m,n) \geq 0} \quad & -\frac{\tau}{2} m^\top D m - t \sum_{ij} d_{ij} n_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & a_i \geq s^w \sum_j n_{ij} + s^f m_i \quad \forall i \quad (r_i) \\ & \sum_i n_{ij} \geq L m_j \quad \forall j \quad (w_j) \\ & \sum_{ij} n_{ij} = N \quad (\bar{v}) \end{aligned}$$

Quiz 均衡の一意性が成立する条件を確認せよ.

Quiz 2 地点のケースで均衡解を求め, 直感的意味を説明せよ.

なお, $a_1 = a_2 = 1$, $L = 1$, $\tau = 1$, $N = 1$, $d_{12} = d_{21} = 1$, $s^w = s^f = 1$ とする. また, 対称性より $m_1 \geq m_2$ として考えてよい.